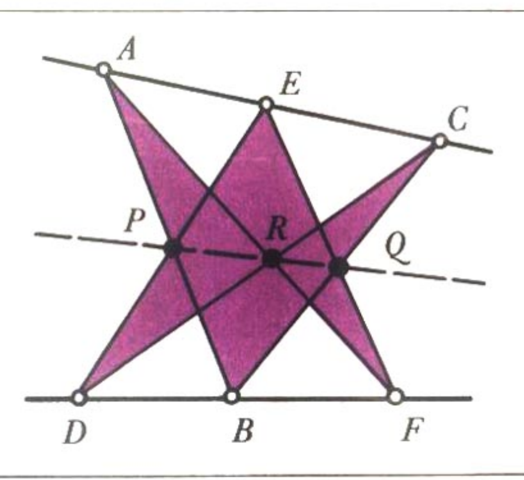
Lecciones populares de matemáticas

TEOREMAS DE CONFIGURACIÓN

B. I. Argunov
L. A. Skorniakov



Editorial MIR


Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Б. И. АРГУНОВ, Л. А. СКОРНЯКОВ

КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

B. I. ARGUNOV, L. A. SKORNIAKOV

TEOREMAS DE CONFIGURACIÓN

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso
por V. Galimski

На испанском языке

IMPRESO EN LA URSS, 1980

CONTENIDO

PREFACIO

En este libro en forma elemental están expuestos algunos importantes teoremas de configuración en el plano, sus consecuencias y aplicaciones para estudiar las propiedades de figuras y resolver algunos problemas. En la medida de lo posible hemos tratado de ligar la accesibilidad de lo expuesto con el nivel necesario de rigurosidad. Además de las nociones principales sobre la planimetría y estereometría, sólo, se emplean conceptos de la proyección central y de elementos impropios del espacio que ya se deben considerar como parte integrante del mínimo de la enseñanza general de matemáticas.

El § 1 contiene conceptos necesarios acerca de la proyección central, así como de puntos impropios y rectas.

Los §§ 2 y 3 están dedicados a los más importantes teoremas de configuración que son los siguientes: teorema de Pappus-Pascal y teorema de Desargues.

En el § 4 se examinan propiedades de configuración de polígonos.

En el § 5 se dan problemas y ejemplos.

En el § 6 se trata el sentido algebraico de teoremas de configuración, así como el método general de obtención de teoremas de esta especie.

Al final del libro está insertada la bibliografía que ayudará al estudio más profundo de teoremas de configuración.

Los autores esperan que el libro sea comprensible para los alumnos de los grados mayores de la escuela secundaria y útil para el maestro en su trabajo en los círculos matemáticos escolares. El conocimiento de teoremas de configuración podrá ayudar al topógrafo y geodesta en su trabajo. El estudiante del centro de enseñanza superior de pedagogía o de la universidad encontrará aqui un material que está estrechamente ligado con el curso principal de la geometría proyectiva.

B.I. Argunov y L.A. Skorniakov

INTRODUCCIÓN

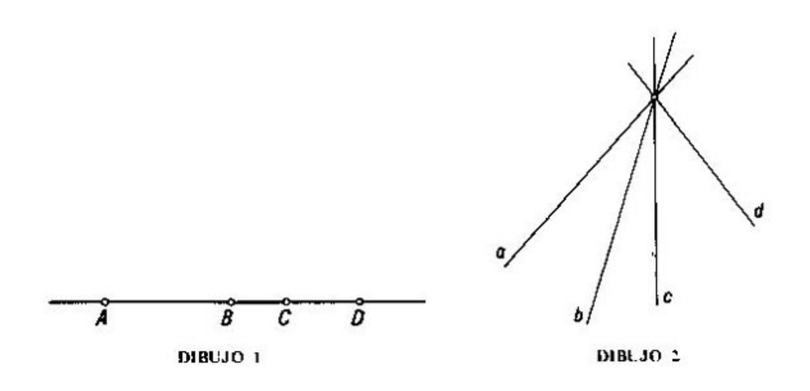
Teoremas de configuración son los más simples teoremas de geometría. Se trata sólo del número finito de puntos y rectas así como de su pertenencia recíproca.

En general el teorema de configuración *) se formula de tal modo que del hecho de que algunos de los puntos que se examinan, pertenecen a una recta o bien algunas de las rectas examinadas pasan por un punto, se deduce que algunos otros puntos se sitúan en una recta o algunas otras rectas pasan por un punto.

Aquí se dan ejemplos más simples de teoremas de configuración:

1. Si los puntos A, B, C y D son distintos, siendo, además, que los puntos A, B y C se encuentran en una recta y, también los puntos A, B y D se sitúan en una recta, entonces los puntos B, C y D también están en una recta (dib. 1).

2. Si las rectas a, b, c y d son diferentes, siendo que las rectas a, b y c pasan por un punto y las rectas a, b y d pasan por un punto, entonces las rectas b, c y d también pasan por un punto (dib. 2).



DIBUJO 1

DIBUJO 2

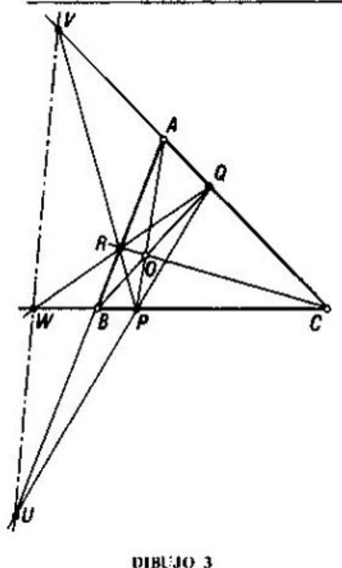
De las proposiciones que se estudian en el curso escolar de geometría a los teoremas de configuración son próximos "Teoremas de los puntos notables del triángulo".

*) Configuración (configuratio en latín) es la disposición recíproca de cualesquier objetos.

Algunos de los teoremas de configuración eran conocidos incluso a los antiguos. En el tiempo actual se han constituido fundamento para la rama más interesante de geometría: geometría proyectiva. A su vez geometría proyectiva presenta un fundamento teórico de la doctrina de la representación de figuras espaciales en el plano: geometría descriptiva.

Ultimamente los algebristas se interesaron por teoremas de configuración cuyas causas se explican hasta cierto grado en el último párrafo del presente folleto.

Teoremas de configuración se aplican exitosamente para estudiar las propiedades de polígonos y para resolver problemas. Son especialmente útiles para la resolución de problemas referentes a la construcción en las condiciones de diferentes restricciones: al construir sólo con ayuda de una regla, al trazar figuras en una parte limitada del plano con puntos inaccesibles, etc.



DIBUJO 3

Trace el triángulo ABC y elija en el interior de éste el punto O. En la intersección de las rectas que unen vértices del triángulo con dicho punto, con los lados opuestos se obtendrán los puntos P, Q y R (dib. 3). Supongamos que U es el punto de intersección de las rectas

AB y PQ, V es el punto de interseccion de las rectas AC y PR, W, el punto de intersección de las rectas BC y QR. Si todos estos puntos se hallan en el dibujo y la construcción se ha efectuado con exactitud, entonces, al poner la regla se puede convencer de que los puntos U, V y W se hallan en una recta. Elija otros triángulos, cambie la posición del punto O, pero el resultado será el mismo.

Si resulta que $BC \parallel QR$, entonces $UV \parallel QR$. Si ocurre que simultáneamente $BC \parallel QR$ y $AC \parallel PR$, entonces de un modo seguro $AB \parallel PQ$.

Es dificil de imaginar que todos estos hechos sean una casualidad. Por lo visto, aquí tiene lugar una ley, debe ser válido algún teorema. Así, es. Aquí tiene lugar un teorema que consiste en lo siguiente:

Si los vértices del triángulo PQR se encuentran respectivamente en los lados del triángulo ABC, siendo que las tres rectas AP, BQ y CR pasan por un punto, y las rectas AB y PQ, AC y PR, BC y QR se intersecan respectivamente en los puntos U, V, W, entonces los puntos U, V y W se encuentran en una recta.

Dichos teoremas se llaman de *configuración*.

El rasgo característico de este teorema consiste en el hecho de que se trata sólo de la pertenencia recíproca de puntos y rectas sin hacer ni suposiciones, ni deducciones, ni conclusiones sobre cualesquiera magnitudes geométricas.

Para recibir la posibilidad de demostrar teoremas de configuración nos es necesario conocer previamente la operación de la proyección central así como el concepto de los puntos y rectas "impropios" o bien "alejados infinitamente".

§ 1. PROYECCIÓN CENTRAL Y ELEMENTOS IMPROPIOS

Primeramente examinemos la proyección central en el plano.

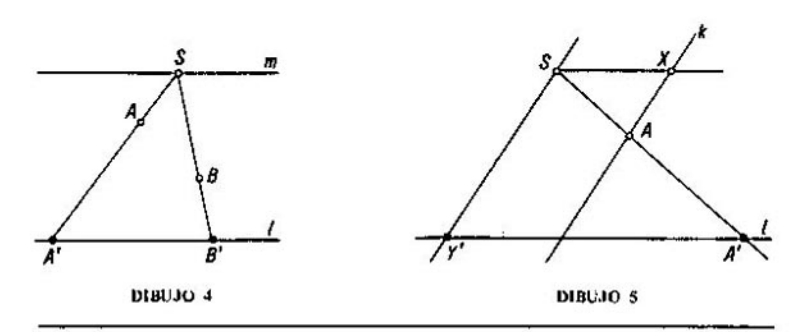
Sean dados la recta l y el punto S que se encuentra fuera de esta recta (dib. 4). Si el punto A es tal que $AS \nparallel l$, entonces la recta SA intersecará la recta l en un punto A'.

Llamaremos este punto como *proyección* del punto A. Supongamos que m es la recta que pasa por el punto S paralelamente a l. Está claro que cada punto B del plano que no está en la recta m, tendrá una cierta proyección B'. De tal modo representamos los puntos del plano que no pertenecen a la recta m, en los puntos de la recta l, utilizando el punto S. Tal representación se llama la *proyección central* y el punto S, el *centro* de la proyección.

Si elegimos una recta k que no pasa por el punto S, entonces la proyección central representa los puntos de la recta k en la recta l. Si $k \parallel l$, entonces las proyecciones no tienen todos los puntos de la recta k. El punto X en el dibujo 5 no tiene proyección, si $SX \parallel l$. Al examinar el dib. 5 no es difícil de notar que en la recta l hay también un punto excepcional, es decir, el punto Y', y donde $SY' \parallel k$. Efectivamente, a diferencia de los demás puntos de la recta l, en el punto Y' no se proyecta ningún punto de la recta k.

Para conceder a los puntos excepcionales los mismos derechos que tienen los demás nos pondremos de acuerdo de que además de los puntos ordinarios cada recta posee un punto *impropio*.

Nos acordamos de que las rectas paralelas tienen el mismo punto impropio. Entonces el punto X recibirá ya la proyección: su proyección será el punto impropio de la recta l. A su vez el punto Y' será la



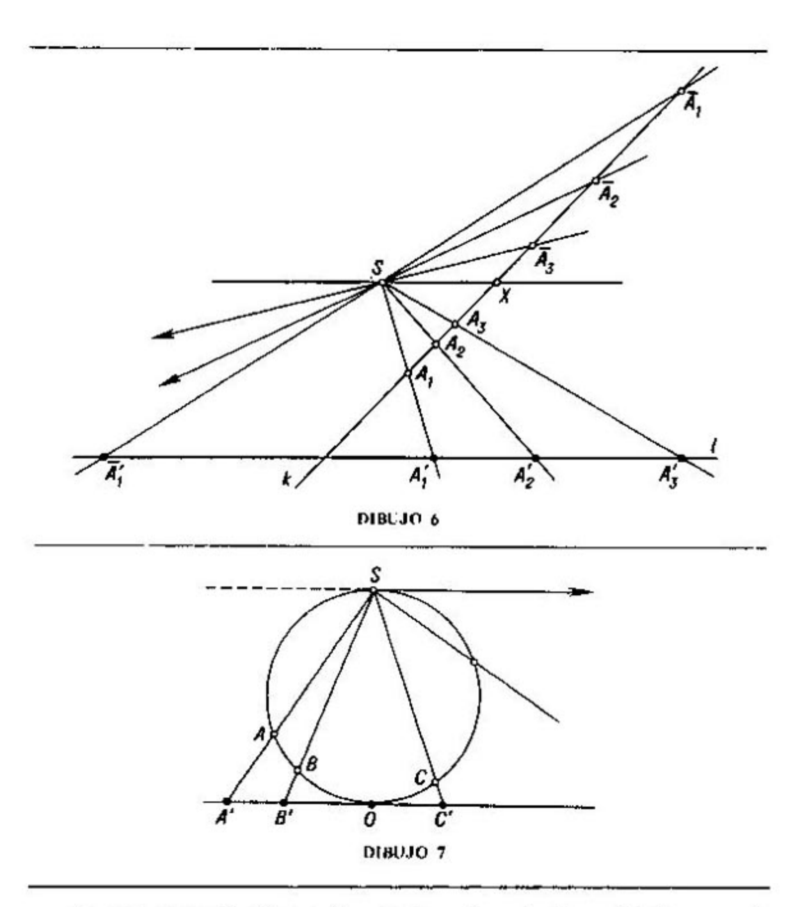
DIBUJO 4 DIBUJO 5

proyección del punto impropio de la recta k. Señalemos que en caso del paralelismo de las rectas k y l su punto común impropio será su proyección propia.

Prestemos atención al hecho siguiente. Si el punto A se aproxima al punto X de la izquierda (en el dibujo 6 el punto A ocupa las posiciones A_1, A_2, A_3, etc.), entonces su proyección se aleja por la recta l más a la derecha. Es por eso que el punto impropio lo llaman también como *punto alejado infinitamente*. Notemos también que al aproximarse el punto A al punto X de la derecha (en el dib. 6 el punto A ocupa las posiciones $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, etc.) su proyección se va por la recta l a la izquierda. Por eso debe considerarse que cada recta tiene un solo punto alejado infinitamente y la misma recta es cerrada.

La recta, complementada por un punto impropio, la denominemos como la recta *proyectiva*. Acordemos que todos los puntos im-

propios se encuentran en una recta *impropia* proyectiva la que llamaremos, a veces, como *alejada infinitamente.* Al plano complementado por puntos impropios y la recta impropia lo denominemos como el *plano proyectivo.*



DIBUJO 6

DIBUJO 7

La recta proyectiva "parece" a una circunferencia. En realidad, para cada punto de la circunferencia podemos oponer el punto de la recta proyectiva de tal modo que a los puntos diferentes de la circunferencia van a corresponder diferentes puntos de la recta proyectiva. El método de la representación está evidente del dibujo 7, si añadimos que el punto O se representa en si mismo y S, en un punto alejado infinitamente.

La introducción de los puntos impropios permite incluir a la formulación general casos excepcionales de teoremas de configuración. En caso del teorema examinado en la introducción dichos casos excepcionales surgen si las rectas que determinan uno de los puntos U, V o W son paralelos. Esto significa que el punto correspondiente es un impropio. Con todo, pueden ser posibles los casos siguientes:

a) $BC \parallel QR$, $AC \parallel PR$;

b) $BC \parallel QR$, $AC \nparallel PR$;

c) $BC \parallel QR$, $AB \parallel PQ$;

d) $BC \parallel QR$, $AB \nparallel PQ$;

e) $AB \parallel PQ$ $AC \parallel PR$;

f) $AB \parallel PQ$, $AC \nparallel PR$.

Como fue señalado en caso de b) resulta que $UV \parallel QR$. En este caso el punto W es impropio. Con ello de $UV \parallel QR$ se deduce que la recta UV pasa por el punto W, es decir, los puntos U, V y W se encuentran en una recta. En caso de a) tenemos $AB \parallel PQ$, o sea que todos los tres puntos U, V y W resultan ser impropios y, por consiguiente, se encuentran en una recta impropia. La situación análoga se observa también en los demás casos.

Ahora demostremos unos teoremas principales acerca de las rectas proyectivas.

Teorema 1. *Por cualquiera que sean dos puntos diferentes (ordinarios o impropios) pasa una y sólo una recta proyectiva.*

Son posibles tres casos: 1) ambos puntos son ordinarios; 2) ambos puntos son impropios; 3) un punto es ordinario y el otro impropio.

En el caso 1), recordemos que de acuerdo con axiomas de la geometría elemental, por dos puntos distintos pasa una y sólo una recta. Ya que la recta impropia no contiene puntos ordinarios, entonces ésta no puede unir los puntos dados.

Para el caso 1) el teorema está demostrado.

En el caso 2) nuestros puntos se unen por una recta alejada infinitamente. Ya que todas las demás rectas contienen sólo un punto impropio, entonces ninguna de ellas puede contener ambos puntos dados.

En el caso 3) designemos por A un punto ordinario y por B un impropio. El punto B se determina (y puede ser dado en el dibujo) por una recta k. La recta proyectiva l va a unir los puntos A y B si y sólo si l es una recta ordinaria, paralela a k y pasa por el punto A. Tal recta,

como es sabido, existe. De la axioma referente a las paralelas se desprende su unicidad.

El teorema 1 está demostrado.

Teorema 2. *Dos rectas proyectivas diferentes se intersecan en uno y sólo en un punto (ordinario o impropio).*

(Antes de leer la demostración, traten de realizarla por sí mismo).

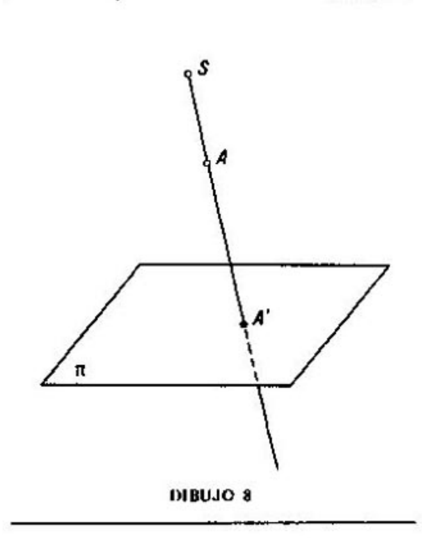
Ante todo para demostrar el teorema 2 señalemos que son posibles dos suposiciones: 1) ambas rectas son ordinarias; 2) una de las rectas es ordinaria y la otra impropia. No se pueden existir dos rectas impropias ya que, según lo acordado, en el plano existe una sola recta alejada infinitamente.

Si las dos rectas no son paralelas, entonces tienen un punto común ordinario. Si las rectas dadas son paralelas, entonces poseen un solo punto común impropio.

En el segundo caso el punto único común de las rectas dadas es el punto impropio de una recta ordinaria dada.

Pasamos al examen de la proyección central en el espacio.

Sean dados el plano proyectivo π y el punto S fuera de este plano (dib. 8). La proyección del punto A en el plano π es el punto A' de in-



DIBUJO 8

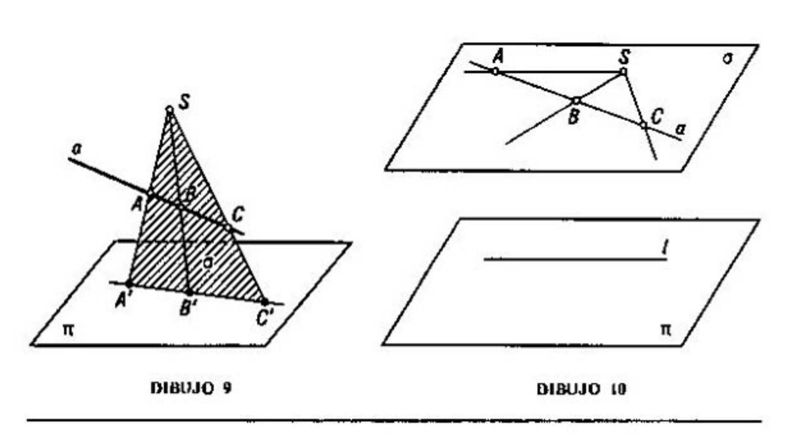
tersección de la recta SA con el plano π. Como en caso del plano, llamaremos el punto S como el *centro* de la proyección. Señalemos que

todos los puntos del plano τ que es paralelo al plano π y pasa por el punto S, se representan en los puntos impropios del plano π.

El plano π, es decir, el plano donde se encuentran proyecciones de los puntos, nos acordemos denominarlo en el futuro como el *plano de proyecciones*.

Teorema 3. *Proyecciones de los puntos que se hallan en una recta, se disponen también en una recta.*

Para demostrarlo supongamos que los puntos dados A, B, C se encuentran en una recta a (dib. 9). Entonces, todas las rectas SA, SB, SC están en el mismo plano σ que se determina por el punto S y la recta a. Si los planos σ y π no son paralelos, entonces los puntos A', B', C' que se encuentran tanto en el plano σ, como en el plano π, están en una recta que es la intersección de estos planos. En caso del paralelismo de los planos σ y π (dib. 10) examinemos el punto impropio de la recta



DIBUJO 9

DIBUJO 10

SA (es natural que consideramos los planos σ y π como *proyectivos*). Este punto impropio debe pertenecer también a cada recta l que se encuentra en el plano π y es paralela a la recta SA. Por consiguiente, el punto impropio A' del plano π será la proyección del punto A. Las proyecciones de los puntos B y C serán también los puntos impropios del plano π. Ya que todos los puntos impropios del plano π, según la definición, se encuentran en una recta, entonces, la validez del teorema 3 está establecida también para el caso cuando los planos σ y π son paralelos.

§ 2. TEOREMA DE PAPPUS – PASCAL

Pappus de Alejandría era un matemático de la Grecia antigua de la segunda mitad del siglo III de nuestra era. En la obra de Pappus "Colección matemática" hay muchos fragmentos de las obras de los autores griegos las cuales no se han guardado hasta nuestros días. Por esta razon constituye una fuente valiosa de la historia de matemáticas de la Grecia antigua.

Blaise Pascal (1623- 1662) era un ilustre matemático, físico y filósofo frances. Recibio su preparación primaria en matemáticas bajo la dirección de su padre, conocido matemático Étienne Pascal. A los dieciséis años Pascal escribió su primer trabajo científico. En esta obra fue demostrado un teorema cuyo caso particular es el teorema de Pappus – Pascal que se examina en este párrafo. Dicho caso particular, verdad es que sin emplear puntos impropios, lo conoció aún Pappus de Alejandría. Los intereses matematicos de Pascal no se limitaban a geometría. Se ocupo de diseñar una máquina de calcular, escribio una serie de obras de aritmética, algebra, teoría de los numeros y teoría de las probabilidades. En particular, él determino exactamente y aplicó para demostrar el método de la plena induccion matematica. En física Pascal se ocupó del estudio de la presión barométrica y de problemas de la hidrostatica. Descubrió, por ejemplo, la ley principal de la hidrostática que dice que la presión sobre la superficie de un líquido, causada por las fuerzas externas, se transmite por el líquido igualmente en todas las direcciones.

Llamaremos la figura de n — *vértices* una formada por diferentes n puntos del plano que están numerados por los números 1, 2, ... n y n rectas que unen los puntos 1 y 2, 2 y 3, ..., $n-1$ y n, n y 1. Dichos puntos se llaman *vértices* de una figura de n-vértices y las rectas que unen consecutivamente sus vértices son sus *lados*. Está claro que una figura de n vértices se diferencia de un n-angulo sólo por sus lados que son rectas y no segmentos de una recta. Si los puntos A, B, C, D, E y F en esta sucesión forman una figura de seis vértices, entonces los vértices A y D, B y E, C y F, es decir, vértices (dib. 11) situados a dos, se llaman *opuestos*. Dos lados de una figura de seis vértices que unen, respectivamente, los vértices opuestos se llaman lados *opuestos* de la figura de seis vértices. Los lados opuestos de la figura de seis vértices $ABCDEF$, examinada arriba, son AB y DE, BC y EF, CD y FA.

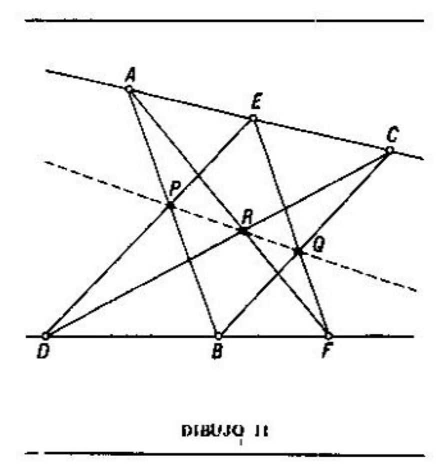
El teorema de Pappus-Pascal expresa una de las propiedades notables de la figura de seis vértices siendo especial la disposición de sus vértices.

Teorema de Pappus – Pascal. *Si los vértices de la figura de seis vértices están situados consecutivamente en dos rectas, entonces los puntos de intersección de sus lados opuestos se encuentran en una recta.*

Incluso si se considera que los vértices de una figura de seis vérti-

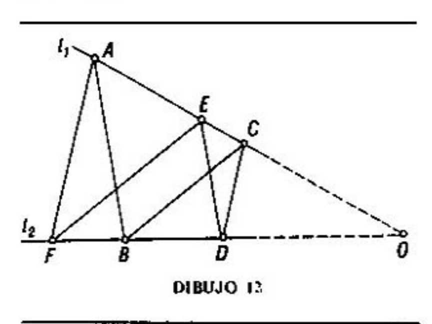
ces son los puntos ordinarios, entonces esta simple formulación del teorema resulta sólo bajo la condición de introducir los puntos y rectas impropios. Sin ello en la conclusión del teorema hubo que hablar por separado de los tres casos siguientes:

1 caso. Los lados opuestos de la figura de seis vértices se intersecan dos a dos y los puntos de su interseccion (los puntos *P*, *Q* y *R* en el dibujo 11) están en una recta.



DIBUJO 11

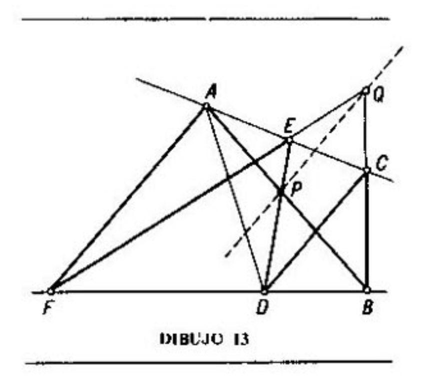
2 caso. Los lados opuestos de la figura de seis vértices son paralelos dos a dos (dib. 12).



DIBUJO 12

3 caso. Dos pares de los lados opuestos de la figura de seis vértices se intersecan en los puntos *P* y *Q* y los lados del tercer par son paralelos a la recta *PQ* (dib. 13)

Los elementos impropios permiten hacer una formulacion única dada arriba para todos estos casos, ya que en el segundo caso todos los tres puntos de intersección de los lados opuestos son impropios y por eso se sitúan en una recta impropia del plano dado. Y en el tercer caso el punto impropio de intersección del tercer par de los lados opuestos pertenece a la recta PQ, ya que a las rectas paralelas se les atribuye un punto impropio común.



DIBUJO 13

Es más que como nos convenceremos, el teorema de Pappus—Pascal se queda valido incluso en el caso cuando algunos vértices de la figura de seis vértices son puntos impropios. Claro está que para todos dichos casos se puede formular el teorema sin utilizar los puntos impropios. Pero ¡cuántos casos habrán! Y para cada de ellos haya que dar una demostracion particular.

Antes de empezar a demostrar el teorema de Pappus—Pascal, demostremos una posicion auxiliar que nos necesitará a continuación.

Lema 1. *Si en el lado OA del ángulo AOB está trazado el segmento OC y en el lado OB, el segmento OD siendo que $|OA|:|OB| = |OC|:|OD|$*, entonces $AB \parallel CD$* (dib. 14).

Puesto que en los triángulos AOC y COD el ángulo O es común, y los lados, entre los cuales se encuentra este ángulo, son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes. Por consiguiente, los ángulos OCD y OAD son congruentes, de donde $CD \parallel AB$.

Ahora vamos a demostrar el teorema de Pappus—Pascal para el segundo caso

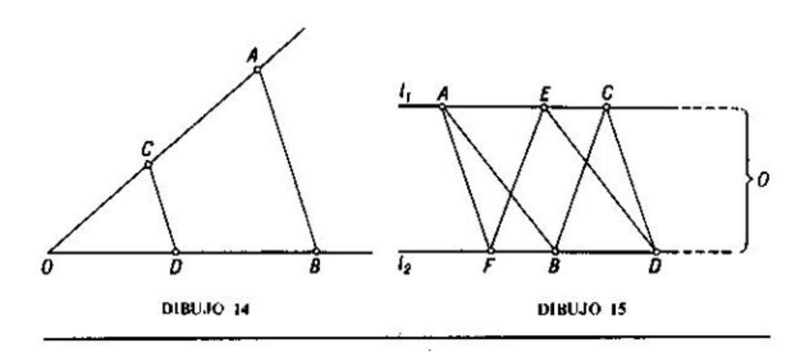
Dado que $AB \parallel DE$ y $BC \parallel EF$. Hay que demostrar que $AF \parallel CD$.

*) $|OA|$ designa la longitud del segmento OA.

Si las rectas l_1 y l_2, en las cuales están situados los vértices de la figura de seis vértices, son paralelas entre sí (dib. 15), entonces de los dados del problema se ve que $|BF| = |CE|$ y $|BD| = |AE|$, como lados opuestos de paralelogramos. Ello quiere decir que son congruentes entre sí los segmentos AC y DF. Por consiguiente, el cuadrángulo $ACDF$ es un paralelogramo, o sea, $AF \parallel CD$. Si las rectas l_1 y l_2 se intersecan en un punto O (véase el dib. 12) de la semejanza de triángulos obtenemos:

$$|OC| : |OE| = |OB| : |OF| \text{ y } |OE| : |OD| = |OA| : |OB|.$$

Multiplicación de término por término de estas igualdades



DIBUJO 14

DIBUJO 15

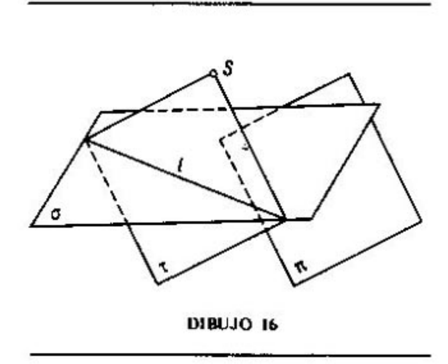
da: $|OC| : |OD| = |OA| : |OF|$. De última igualdad de acuerdo con el lema 1, se deduce que $AF \parallel CD$. De tal modo se muestra que si dos pares de los lados opuestos de la figura de seis vértices que satisface las condiciones del teorema de Pappus — Pascal, son paralelas, entonces los lados de la tercera pareja son también paralelos entre sí.

Demostremos una proposición auxiliar más.

Lema 2. *Cualquiera que sea la recta l en el plano σ, existen tal* centro de proyección *S y tal plano de proyecciones π, que la recta l se proyecta en una recta* impropia del plano π. *Además el plano π es paralelo al plano τ que pasa por el punto S y la recta l.*

Para la demostración se toma como el centro de proyección un punto arbitrario S que no está en el plano σ (dib. 16). Por el punto S y la recta l tracemos el plano τ (la posibilidad de que la recta l es impropia no debe confundirnos, puesto que en este caso el plano que pasa por S y l es un plano que pasa por el punto S paralelamente al plano σ). Supongamos que π es un plano paralelo a τ y no pasa por el

punto S Si el punto A pertenece a la recta l, la recta SA se encuentra en el plano τ y, por lo tanto, es paralela al plano π. Por esta razón, A se proyecta al punto impropio del plano π. Ya que esto es justo para todo el punto de la recta l entonces el punto S y el plano π elegidos por nosotros satisfacen la conclusión del lema.



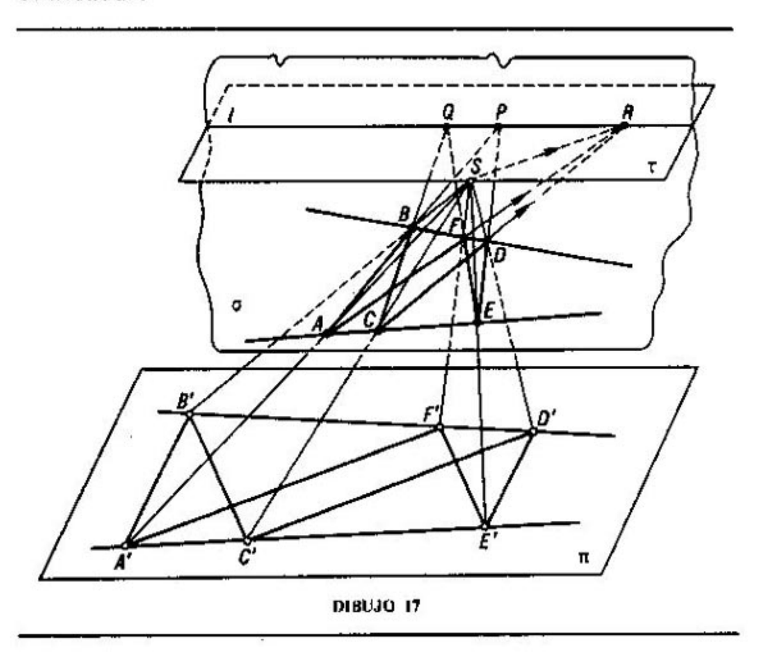
DIBUJO 16

Volvemos a la demostración del teorema de Pappus— Pascal.

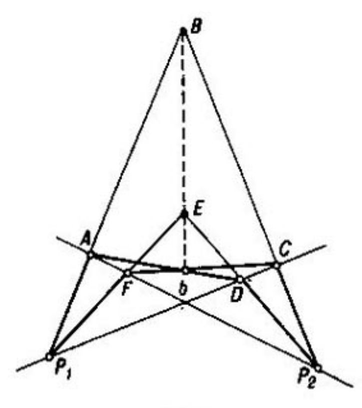
Designemos el plano por σ donde se encuentra la figura de seis vértices y por l, la recta PQ (dib. 17). Según el lema 2, hay tales centro de proyección S y el plano de proyecciones π que la recta impropia del plano π servirá de proyección de la recta l. Con esto el plano τ determinado por el punto S y la recta PQ es paralelo al plano π. Marquemos proyecciones de los vértices de la figura de seis vértices con A', B'. C' D'. E', F' y. respectivamente, las proyecciones de los puntos P. Q y R con P', Q' y R'. Puesto que el punto P pertenece a las rectas AB y DE. entonces del teorema 3 se deduce que el punto P', pertenece a las rectas $A'B'$ y $D'E'$. Mediante los mismos razonamientos se puede señalar que Q' pertenece a las rectas $B'C'$ y $E'F'$, y R' a las rectas $C'D'$ y $A'F'$. Pero P' y Q' son puntos impropios. Por consiguiente, $A'B' \parallel D'E'$ y $B'C' \parallel E'F'$. Además, según las condiciones de nuestro teorema, tomando en consideración el teorema 3, resulta que tanto los puntos A', C' y E', como los puntos B', F' y D' se encuentran, respectivamente, en una recta. Como se ha demostrado, de aqui se deduce que $C'D' \parallel A'F'$. Esto significa que el punto R' se halla en la recta impropia del plano π. Pero todos los puntos de la recta impropia de este plano, según la construcción, son proyecciones de los puntos de la recta l que se encuentra en el plano σ.

Por consiguiente, el punto R pertenece a la recta l, es decir, los

puntos P, Q y R se encuentran en una recta. El teorema está demostrado.



DIBUJO 17



DIBUJO 18

Del teorema de Pappus— Pascal se deduce fácilmente el corolario que se llama, a veces, el *teorema de Brianchon* (1785—1864):

Teorema 4. *Si los lados de una figura de seis vértices pasan sucesivamente por los dos puntos dados, entonces las tres rectas que unen sus vértices opuestos, se convergen en un punto.*

En efecto, supongamos que A, B, C, D, E, F son los vértices sucesiv[illegible] la figura de seis vértices, siendo que los lados AB, CD y EF pasan por el punto P_1 y los lados BC, DE y AF, por el punto P_2 (dib. 18). Dado que b es el punto de intersección de las rectas AD y CF. Se debe demostrar que la recta BE pasa por el punto b o hablando de otro modo que los puntos b, C y E se encuentran en una recta.

Pero, esto se deduce directamente del teorema de Pappus—Pascal, aplicándole a la figura de seis vértices $ADP_2\ CFP_1$. Al mismo tiempo no se debe olvidar que el lado de la figura de seis vértices es una recta y no un segmento.

§ 3. TEOREMA DE DESARGUES

Girard Desargues (1593—1662; segun otros datos, 1591—1661) era un eminente matemático francés, el cual fundó los principios de la geometría proyectiva y descriptiva. Desargues fue el primero, quien introdujo en la geometría el estudio de los puntos y rectas impropios. En vida del científico sus ideas las podían entender y apreciar sólo los matemáticos mas destacados de aquel tiempo: Descartes, Fermat y B. Pascal. Sólo al principio del siglo XIX las ideas de Desargues empezaron a encontrar un reconocimiento general. Siendo ingeniero militar según su enseñanza, Desargues manifestó interés a la argumentación exacta matemática de operaciones prácticas. A estos problemas están dedicadas obras de Desargues sobre tallado en piedra y acerca de relojes de Sol.

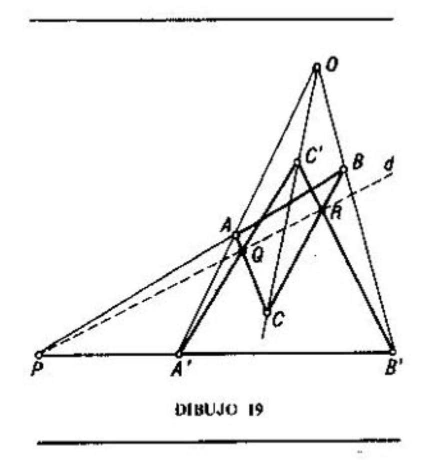
Pasamos ahora al segundo de los más importantes teoremas de configuración conocido bajo el nombre de teorema de Desargues.

Teorema de Desargues. *Si dos figuras de tres vértices ABC y $A'B'C'$ se encuentran en el plano de tal modo que las rectas AA', BB' y CC', que unen sus vértices correspondientes, se convergen en un punto O, los puntos de intersección de los lados correspondientes**) *de estas figuras de tres vértices se sitúan en una recta* (dib. 19).

* Los vertices A y A', B y B', C y C' se consideran correspondientes según definición. Los lados se llaman correspondientes si unen vértices correspondientes.

Antes de demostrar el teorema de Desargues, señalemos que el teorema formulado en la introducción es el caso particular del teorema de Desargues. Efectivamente, es fácil de ver que los triángulos examinados ABC y PQR satisfacen las condiciones del teorema de Desargues.

Pasamos a la demostración del teorema de Desargues. Dado que AB y $A'B'$ se intersecan en el punto P, AC y $A'C'$ en el punto Q, BC



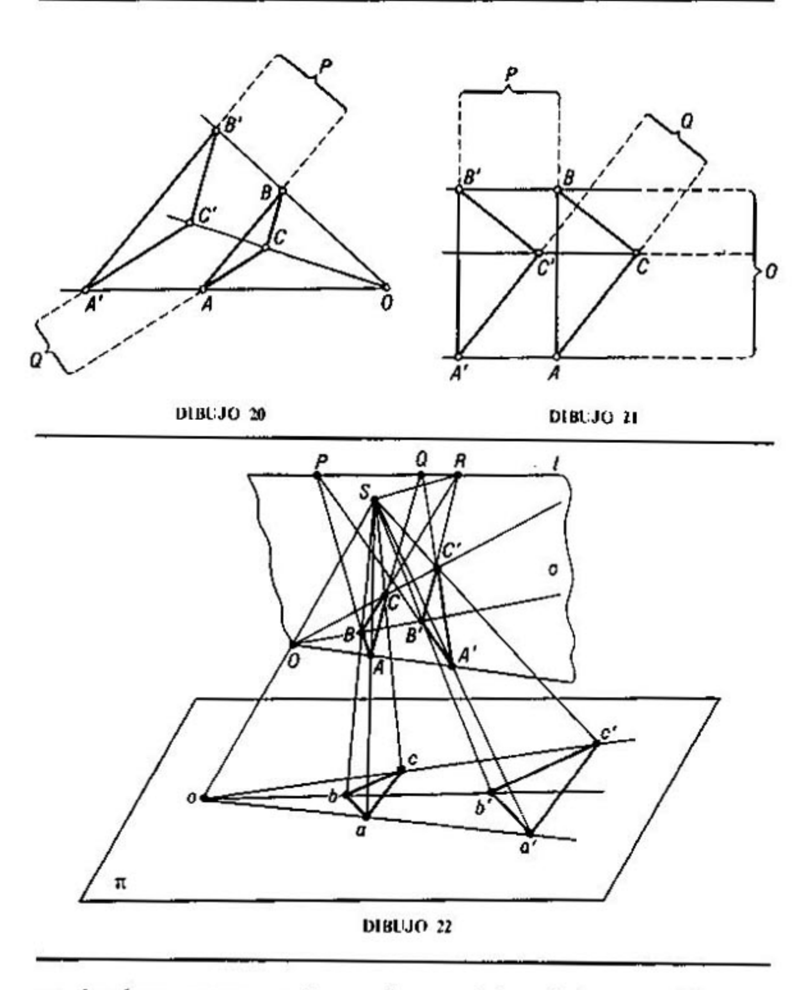
DIBUJO 19

y $B'C'$ en el punto R. Se debe demostrar que los puntos P, Q y R se disponen en una recta.

Al principio supongamos que entre los puntos P, Q y R los dos puntos, por ejemplo, P y Q son impropios. Entonces $AB \parallel A'B'$ y $AC \parallel A'C'$ Si el punto O es ordinario (dib. 20), entonces de la semejanza de los triángulos AOB y $A'OB'$ se deduce que $|OB| : |OB'| = |OA| : |OA'|$, y de la semejanza de los triángulos AOC y $A'OC'$ se desprende que $|OA| : |OA'| = |OC| : |OC'|$. De aquí $|OB| : |OB'| = |OC| : |OC'|$. Según el lema 1 demostrado en la página 17, de la última igualdad se deduce que $BC \parallel B'C'$, es decir, el punto R también es impropio. Si el punto O es impropio (dib. 21), entonces tenemos $AA' \parallel BB' \parallel CC'$. Por eso los cuadriláteros $AA'B'B$ y $AA'C'C$ son paralelogramos. De aquí $|BB'| = |AA'|$ y $|AA'| = |CC'|$ Por consiguiente, los segmentos BB' y CC' son congruentes y paralelos lo que proporciona $BC \parallel B'C'$. De este modo, si los puntos P y Q son impropios, entonces el punto R también resulta impropio, es decir, los puntos P, Q y R se encuentran en una recta impropia. Pa-

ra el caso cuando los puntos P y Q son impropios, el teorema de Desargues está demostrado.

Ahora supongamos que entre los puntos P, Q y R los dos puntos, por ejemplo, P y Q son ordinarios (dib. 22). Designemos por σ el pla-



DIBUJO 20

DIBUJO 21

DIBUJO 22

no, donde se encuentran figuras de tres vértices dadas y por l la recta PQ. Según el lema 2 demostrado en la página 18 se encontrarán tales

centro de proyección S y el plano de proyecciones π que la recta impropia del plano π será la proyección de la recta l. Proyecciones de los puntos marcados con letras mayúsculas designemos por letras minúsculas correspondientes. Puesto que el punto P pertenece a las rectas AB y $A'B'$, entonces del teorema 3 (pág. 14) se desprende que el punto p pertenece a las rectas ab y $a'b'$. Con tales razonamientos se puede mostrar que q pertenece a las rectas ac y $a'c'$, r se encuentra en las rectas bc y $b'c'$, y o, en las rectas aa', bb' y cc'. Además, ya que p y q son los puntos impropios, tenemos $ab \parallel a'b'$ y $ac \parallel a'c'$. Como fue demostrado, de aquí se deduce que $bc \parallel b'c'$. Ello quiere decir que el punto r está en una recta impropia del plano π. Pero, todos los puntos de esta recta impropia, según la construcción, son proyecciones de los puntos de la recta l. Por consiguiente, el punto R pertenece a la recta l, es decir, los puntos P, Q y R se encuentran en una recta.

Las otras suposiciones posibles respecto a los puntos P, Q y R pueden diferenciarse sólo por designaciones puesto que dichos puntos son completamente iguales. Por eso podemos considerar que el teorema de Desargues esta demostrado por completo.

Es interesante subravar que la demostración del teorema de Desargues puede realizarse sin emplear la teoría de la semejanza. Pero, en este caso hace falta utilizar más estereometría. Haremos esta demostración. Primeramente, demostremos un lema auxiliar.

Lema 3. Supongamos que α, β y γ son los tres planos diferentes, siendo que la línea de intersección de los planos α y β es la recta h, la línea de intersección de los planos α y γ es la recta k y la línea de intersección de los planos β y γ es la recta l. Si las rectas h, k y l son diferentes por parejas, entonces de un modo seguro tienen un punto común único.

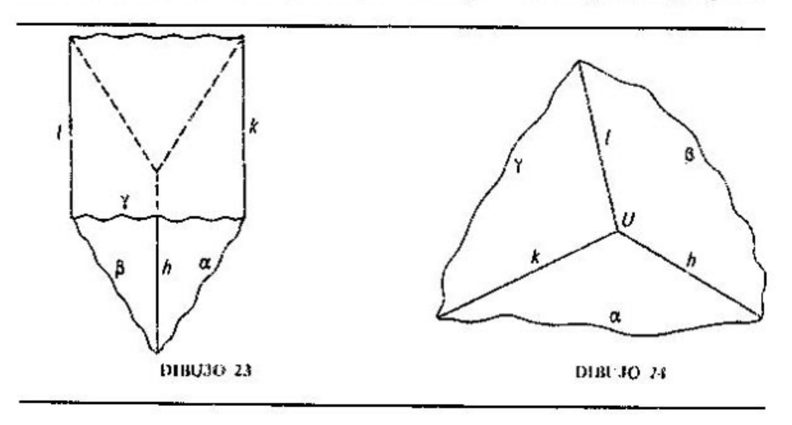
Para demostración examinemos las rectas h y k. Son posibles los casos siguientes: 1) todas las tres rectas son ordinarias y $h \parallel k$ (dib. 23); 2) todas las tres rectas son ordinarias y las rectas h y k tienen un punto ordinario común U (dib. 24); 3) cualquiera de las tres rectas es impropia (dib. 25) (sólo una de las rectas h, k y l puede ser impropia, puesto que el plano contiene una sola recta impropia).

En el curso escolar de geometría se demuestra el teorema siguiente: si una recta dada es paralela a cualquiera recta situada en un plano, la recta dada es paralela a este plano. Por eso en el primer caso la recta k debe ser paralela al plano β (dib. 23). De tal modo el plano γ pasa por la recta k paralela al plano β. Como es sabido del curso escolar, de aquí se desprende que la línea de intersección de los planos β y γ, o sea, la recta l es paralela a la recta k. De tal modo $h \parallel k \parallel l$ y por consiguiente, estas rectas tienen un punto impropio común U.

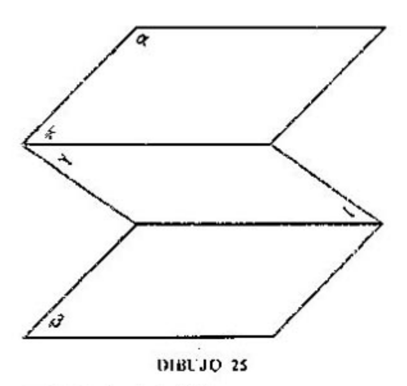
En el segundo caso notemos que ya que el punto U se encuentra en la recta h, este punto pertenece al plano β. Pero, el punto U se encuentra también en la recta k y, por consiguiente, pertenece al plano γ. Por esta razón el punto U es el punto común de los planos β y γ y por eso debe pertenecer a la línea de

intersección de estos dos planos, es decir, a la recta l. De tal modo, igual como en el segundo caso, la validez de nuestro lema esta demostrado.

Pasando al examen del tercer caso, supongamos que h es una recta impropia (si de las tres rectas h, k y l la impropia es la otra, entonces razonamos analogamente). Entonces $\alpha \parallel \beta$ (dib. 25). Segun los datos, tanto k como l son las rectas ordinarias, es decir, el plano γ interseca igualmente el plano α y el plano



DIBUJO 23 DIBUJO 24



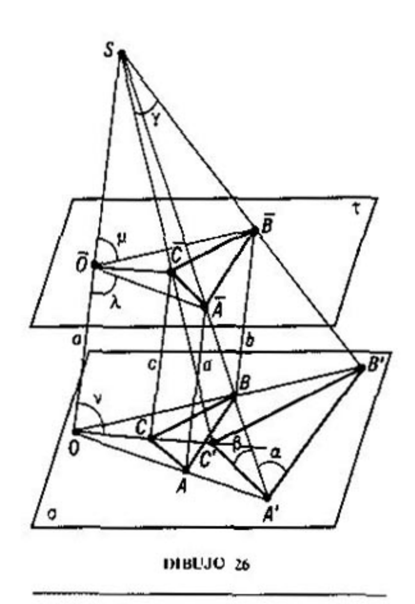
DIBUJO 25

β. Del curso escolar se sabe que ya que $\alpha \parallel \beta$ estas lineas de intersección deben ser paralelas, es decir, $k \parallel l$.

El punto comun impropio U de las rectas k y l, claro está, se encuentra en la recta impropia del plano α, o sea, en la recta h. De tal modo, incluso en el tercer caso nuestras rectas tienen el punto común único U. El lema 3 está demostrado por completo.

Es necesario efectuar una nueva demostración del teorema de Desargues. La demostración hay que hacer sólo para el caso cuando entre los puntos P, Q y R los dos puntos son impropios. Como fue señalado, para los otros casos el teorema de Desargues puede ser deducido sin emplear la teoría de la semejanza. Supongamos que los puntos P y Q son impropios.

Al principio supongamos que el punto O es ordinario. Designemos por σ el plano donde están situadas dadas figuras de tres vértices (dib. 26). Tracemos el plano τ paralelo al plano σ. Luego, tracemos por el punto A la recta a que no pertenece al plano σ. Dado que las rectas b, c y o son paralelas a a, además b pasa por el punto B, c pasa por el punto C y o, por el punto O. Las



DIBUJO 26

rectas a, b, c y o intersecan el plano τ, respectivamente, en los puntos $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ y $\bar{O}$. Las rectas AB y $\bar{A}\bar{B}$ son las líneas de intersección del plano que pasa por las rectas a y b con planos paralelos σ y τ. Por consiguiente, $AB \parallel \bar{A}\bar{B}$. Así mismo $AC \parallel \bar{A}\bar{C}$, $BC \parallel \bar{B}\bar{C}$, $OA \parallel \bar{O}\bar{A}$, $OB \parallel \bar{O}\bar{B}$ y $OC \parallel \bar{O}\bar{C}$. Las últimas relaciones demuestran la existencia de los planos siguientes:

λ que pasa por los puntos O, A, $\bar{O}$ y $\bar{A}$,
μ que pasa por los puntos O, B, $\bar{O}$ y $\bar{B}$,
ν que pasa por los puntos O, C, $\bar{O}$ y $\bar{C}$

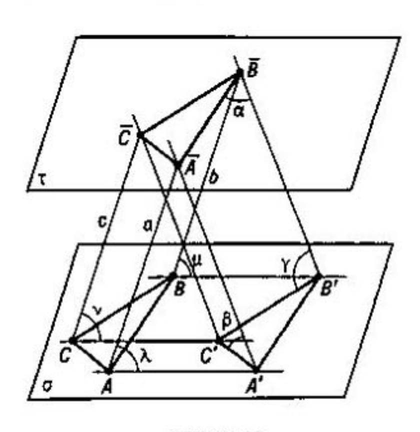
Ya que según los datos del teorema $AB \parallel A'B'$ y $AC \parallel A'C'$, entonces de

$AB \parallel \bar{A}\bar{B}$ se deduce que $A'B' \parallel \bar{A}\bar{B}$, y de $AC \parallel \bar{A}\bar{C}$, $A'C' \parallel \bar{A}\bar{C}$. Por eso podemos examinar también los planos

α que pasa por los puntos A', B', $\bar{A}$ y $\bar{B}$,
β que pasa por los puntos A', C' $\bar{A}$ y $\bar{C}$.

Los planos α, λ, μ y las rectas $A'\bar{A}$, $B'\bar{B}$, y $O\bar{O}$ satisfacen las condiciones del lema 3. Por consiguiente, las rectas $A'\bar{A}$, $B'\bar{B}$ y $O\bar{O}$ tienen el punto común $\underline{S}$. El lema 3 puede ser aplicado también a los planos β, μ, ν y a las rectas $A'\bar{A}$, $C'\bar{C}$, $O\bar{O}$. Por lo tanto, el punto común lo tienen también estas rectas. Pero, como está señalado, el punto común de las rectas $A'\bar{A}$ y $O\bar{O}$ es el punto S. Por consiguiente, la recta $C'\bar{C}$ pasa también por el punto S. Designemos por γ el plano que pasa por los puntos S, B' y C'. Está claro que los puntos $\bar{B}$ y $\bar{C}$ se encuentran en este plano. Por lo tanto, el plano γ interseca el plano σ por la recta $B'C'$ y el plano τ por la recta $\bar{B}\bar{C}$. Puesto que $\sigma \parallel \tau$, entonces $B'C' \parallel \bar{B}\bar{C}$. Pero, antes fue determinado que $\bar{B}\bar{C} \parallel BC$. Por lo tanto $B'C' \parallel BC$, lo que era necesario demostrar.

Ahora supongamos que el punto O es impropio (dib. 27). Hay que cambiar un poco la demostración, pues en este caso no se puede trazar por el pun-



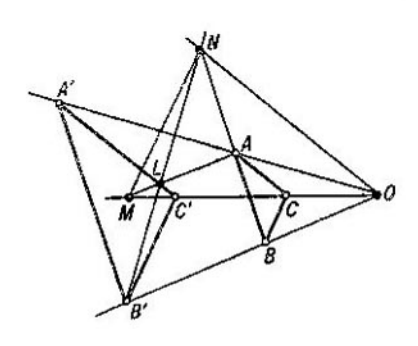
DIBUJO 27

to O la recta o paralela a la recta a. Dado, como antes, que $AB \parallel A'B'$ y $AC \parallel A'C'$, pero, además, $AA' \parallel BB' \parallel CC'$. Se debe demostrar que $BC \parallel B'C'$. De nuevo designemos por σ el plano donde se encuentran las figuras de tres vértices dadas, y por τ cualquier plano paralelo al plano σ distinto de éste. Siendo, como antes, a, b y c las tres rectas paralelas trazadas, respectivamente, por los puntos A, B y C y que intersecan el plano τ en los puntos $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$. Como antes los lados de las figuras de tres vértices ABC y $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ son, respectivamente, paralelos mientras que $\bar{A}\bar{B} \parallel A'B'$ y $\bar{A}\bar{C} \parallel A'C'$. Marquemos con λ el

plano $A\bar{A}A'$, con μ el plano $B\bar{B}B'$ y con γ el plano $C\bar{C}C'$. Supongamos que las designaciones α, β y γ guardan su sentido anterior. Está claro que el plano α interseca los planos λ y μ por las rectas paralelas, mientras que la línea de intersección de los planos λ y μ es una recta impropia, la cual marquemos con p. Por eso los planos α, λ y μ se encuentran en las condiciones del tercer caso del lema 3. Por consiguiente, las rectas $A'\bar{A}$, $B'\hat{B}$ y p tienen el punto común (im propio) S. Aplicando el lema 3 a los planos β, λ y μ determinemos igualmente que las rectas $A'\bar{A}$, $C'\bar{C}$ y p tienen el punto común S'. Pero, ya que las rectas $A'\bar{A}$ y p tienen el punto común único (véase el teorema 2 del § 1), entonces, los puntos S y S' coinciden. Los puntos S, B' y C' determinan el plano γ donde están también los puntos $\bar{B}$ y $\bar{C}$. Las rectas $B'C'$ y $\bar{B}\bar{C}$ deben ser paralelas puesto que son líneas de intersección del plano γ con los planos paralelos σ y τ. Sin embargo, ya que $\bar{B}\bar{C} \parallel BC$, entonces $B'C' \parallel BC$ lo que se requería demostrar.

Ademas señalemos que el teorema de Desargues puede ser dedacto del teorema de Pappus— Pascal sin emplear la teoría de la semejanza. Como fue senalado arriba será bastante hacer demostración para el caso cuando los puntos P y Q son impropios

Supongamos (dib. 28) que las tres rectas AA', BB' y CC' se convergen en un punto O y que $AB \parallel A'B'$ y $AC \parallel A'C'$. Es necesario demostrar que



DIBUJO 28

$BC \parallel B'C'$. Tracemos por A una recta paralela a OB y que se corte con la recta $A'C'$ en el punto L, y con la recta OC en el punto M. Designemos por la letra N la intersección de la recta AB con la recta $B'L$ y unamos el punto N con los puntos O y M. Aplicando el teorema de Pappus— Pascal a la figura de seis vértices $ONALA'B'$ y puesto que según la condición $AN \parallel A'B'$, y por la construcción $AL \parallel B'O$, hallamos que $ON \parallel LA'$ y por lo tanto, $ON \parallel CA$. En la figura de seis vértices $ONMACB$, según lo demostrado, tiene lugar $ON \parallel AC$ y por la suposición $AM \parallel OB$. Por eso, de acuerdo con el teorema de Pappus — Pascal debe ser también $MN \parallel BC$. Por fin, notemos que la figura de seis vertices $ONMLC'B'$ tambien satisface la condición del teorema de Pappus— Pascal

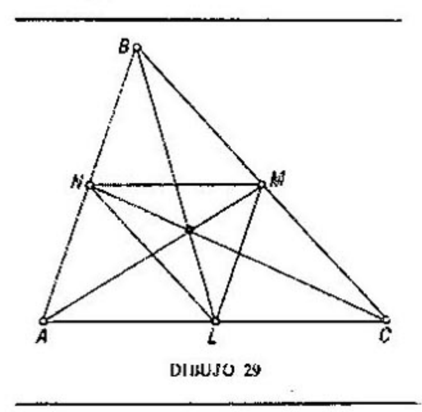
siendo que $ON \parallel LC'$ por lo demostrado, mientras que $ML \parallel B'O$ según la construcción. Por consiguiente, $MN \parallel B'C'$. Pero, hemos establecido que $MN \parallel BC$. Por lo tanto, $BC \parallel B'C'$ lo que se requería demostrar.

Notemos que sin emplear consideraciones espaciales o teoría de la semejanza es imposible demostrar el teorema de Desargues. Lo que puede ser demostrado estrictamente.

Es válida también la suposición inversa al teorema de Desargues.

Teorema 5. *Si dos figuras de tres vértices ABC y $A'B'C'$ se encuentran en el plano de tal modo que los puntos de intersección de sus lados correspondientes están en una recta, las rectas AA', BB' y CC' que unen vértices correspondientes de estas figuras de tres vértices concurren en un punto.*

Para hacer la demostración examinemos el dib. 19. Que sea conocido que los puntos P, Q y R se encuentran en una recta y es necesario



DIBUJO 29

demostrar que la recta CC' pasa por el punto O que es el punto de intersección de las rectas AA' y BB'. Apliquemos el teorema de Desargues a las figuras de tres vertices $AA'Q$ y $BB'R$, considerando como vértices correspondientes de A y B, A' y B', Q y R. En este caso las rectas que unen vértices correspondientes de dichas figuras de tres vértices se convergen en un punto P. Por consiguiente, según el teorema de Desargues los puntos de intersección de sus lados correspondientes AA' y BB', AQ y BR, $A'Q$ y $B'R$, es decir, los puntos O, C y C' deben situarse en una recta. El teorema está demostrado.

El teorema conocido sobre la intersección de medianas de un triángulo en un solo punto representa un corolario directo del teorema 5. Efectivamente, si L, M y N son los puntos medios del triángulo ABC (dib. 29), entonces los lados de las figuras de tres vertices ABC

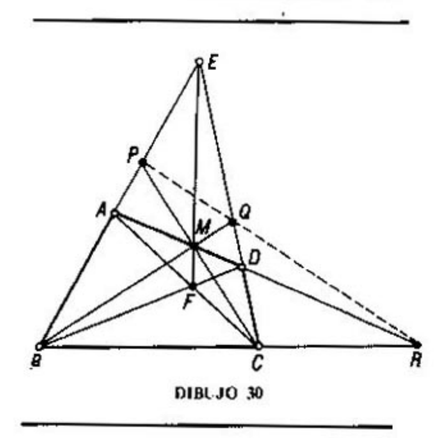
y MNL a base del teorema sobre la línea mediana del triángulo, son paralelos, respectivamente, o sea, se encuentran en una recta impropia. De aquí, según el teorema 5, se deduce que las rectas AM, BL y CN, es decir, medianas del triángulo dado deben convergir en un punto.

§ 4. ALGUNAS PROPIEDADES DE POLÍGONOS

En este párrafo con ayuda del teorema de Pappus — Pascal y de Desargues se determinarán algunas propiedades de polígonos.

Teorema 6. *Dado que $ABCD$ es una figura de cuatro vértices arbitraria* (dib. 30): *E, el punto de intersección de sus lados opuestos AB y CD; F, el punto de intersección de diagonales AC y BD; M, el punto de intersección de la recta EF con el lado AD. Entonces, el punto P en que se intersecan las rectas AB y CM, el punto Q, donde se intersecan las rectas BM y CD y el punto R, donde se intersecan los lados AD y BC, se encuentran en una recta.*

Para demostrarlo examinemos las figuras de tres vértices AED y CMB. Las rectas AC, EM y BD convergen en el punto F (véase la tabla I). Los lados correspondientes de estas figuras de tres vértices se intersecan en los puntos P, Q y R. Según el teorema de Desargues estos puntos se sitúan en una recta, lo que era necesario demostrar.



DIBUJO 30

Corolario. *Las rectas que unen extremos de la base de un trapecio o paralelogramo con el punto medio del lado opuesto, intersecan lados laterales en los puntos situados en una recta paralela a la base.*

Efectivamente, si $ABCD$ es un trapecio con bases AD y BC (dib. 31), entonces, como es sabido, el punto M, construido como se señala en el teorema 6, se situa en el punto medio del segmento AD. Por otro lado, en este caso el punto R de intersección de las rectas AD

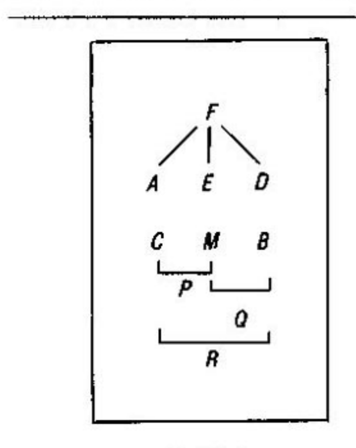
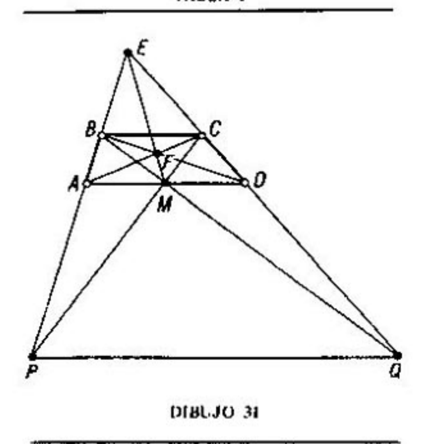


TABLA I



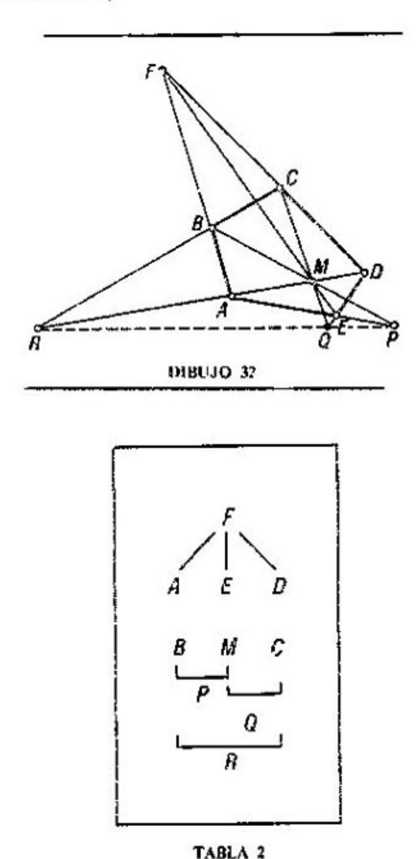
DIBUJO 31

y BC está alejado infinitamente Por esta razon, la recta PQ que debe pasar por este punto, sera paralela a las rectas AD y BC.

Si $ABCD$ no es un trapecio sino un paralelogramo, entonces no se cambia la deliberación. Pero, en este caso el punto E resulta ser impropio.

Teorema 7. *Sea ABCDE una figura arbitraria de cinco vértices; F, el punto de intersección de los lados no adyacentes AB y CD; M, el punto de intersección de la diagonal AD con la recta EF. En este caso, el punto P de la intersección del lado AE con la recta BM; el punto Q de la intersección del lado DE con la recta CM y el punto R de la intersección del lado BC con la diagonal AD se sitúan en una recta* (dib. 32).

Para demostrarlo es bastante señalar que las figuras de tres vértices *AED* y *BMC* satisfacen las condiciones del teorema de Desargues puesto que las rectas *AB*, *EM* y *DC* convergen en un punto *F*. De aquí se deduce directamente que los puntos *P*, *Q* y *R* se encuentran en una recta (véase la tabla 2).



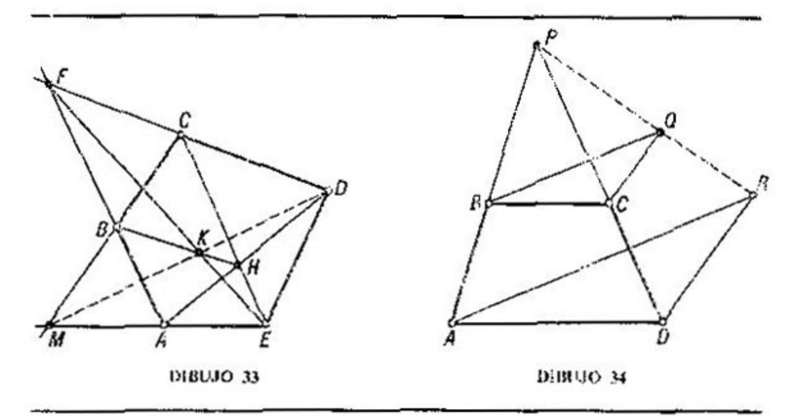
DIBUJO 32

TABLA 2

Teorema 8. *Sea $ABCDE$ una figura arbitraria de cinco vértices; F, el punto de intersección de sus dos lados no adyacentes AB y CD; M, el punto de intersección de los dos lados no adyacentes AE y BC; H, el punto de intersección de las diagonales AD y CE; K, el punto de intersección de las rectas EF y BH. Entonces la recta DK pasa por el punto M* (dib. 33).

Para demostrar este teorema es suficiente señalar que la figura de seis vértices $AEFCBH$ satisface las condiciones del teorema de Pappus — Pascal. Con esto, los lados AE y BC se intersecan en el punto M, los lados EF y BH, en el punto K, los lados FC y HA, en el punto D. Por consiguiente, los puntos M, K y D se encuentran en una recta, o sea, la recta DK pasa por el punto M. El teorema está demostrado.

Teorema 9. *Si tracemos por los extremos de los lados laterales de un trapecio (o un paralelogramo) pares de rectas paralelas, entonces las rectas que salen de extremos de la misma base y los lados laterales del trapecio se intersecarán en tres puntos situados en una recta* (dib. 34).

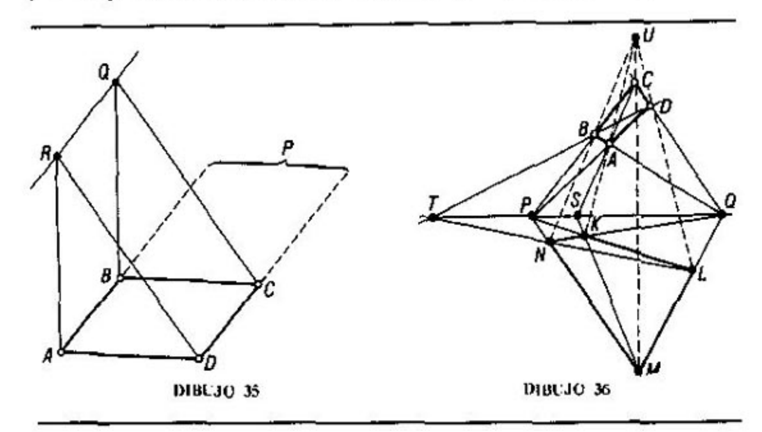


DIBUJO 33 DIBUJO 34

Para demostrarlo es suficiente convencerse de que los puntos P, Q y R están situados en una recta. Los lados de las figuras de tres vértices BCQ y ADR son paralelos respectivamente, es decir, los puntos de intersección de sus lados correspondientes se encuentran en una recta impropia. Según el teorema 5, las rectas AB, DC y RQ deben converger en un punto. Por consiguiente, la recta QR pasará por el punto P. El teorema está demostrado (señalemos que si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces el punto P es impropio, $QR \parallel AB$ (dib. 35)).

Demos un ejemplo de un teorema de configuración aún más complejo

Teorema 10. *Sean P y Q los puntos de intersección de los lados opuestos de la figura de cuatro vertices ABCD* (dib. 36); *S, el punto de intersección de las rectas AC y PQ; T, el punto de interseccón de las rectas BD y PQ. Luego, dada la figura de cuatro vértices KLMN tal que sus lados opuestos se crucen en los puntos P y Q y la diagonal KM pase por el punto S. Entonces la diagonal LN pasa por el punto T.*



DIBUJO 35

DIBUJO 36

Para demostrarlo supongamos que inicialmente la recta *KM* no pasa por el punto *A* y tracemos las rectas *AK*, *DL*, *CM* y *BN*. Las figuras de tres vértices *ACD* y *KML* satisfacen las condiciones del teorema 5 (véase la tabla 3). Por esta razón, las rectas *AK*, *CM* y *DL* concurren

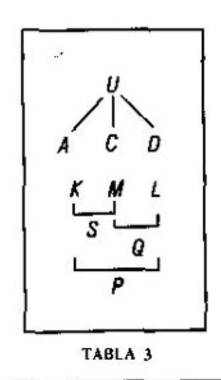


TABLA 3

en un punto U. Se puede también emplear el teorema 5 para las figuras de tres vértices BCA y NMK (tabla 4). Por lo tanto, las rectas BN, CM y AK concurren asimismo en el punto U. Ahora se puede aplicar el teorema 5 a las figuras de tres vértices BPN y DQL (tabla 5). Por con-

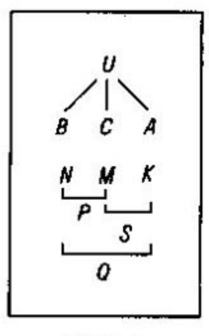



TABLA 4

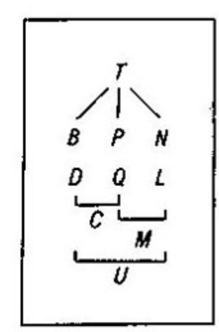
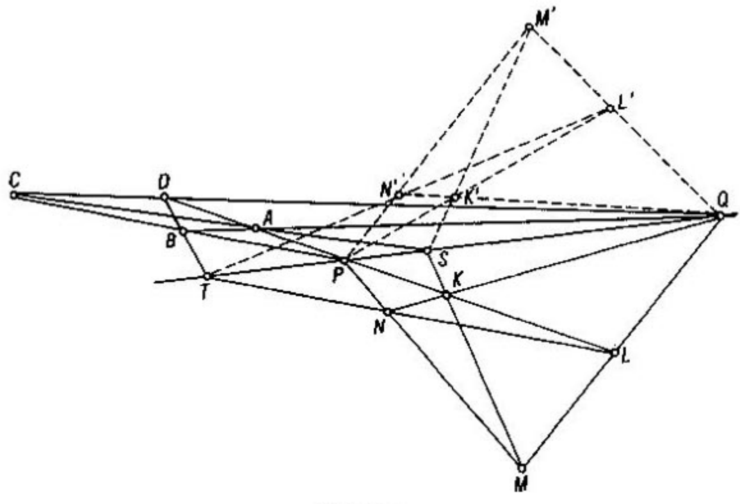


TABLA 5



DIBUJO 36a

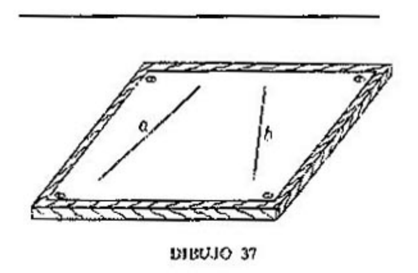
siguiente, las rectas BD, PQ y NL concurren en el punto T. Con la suposición hecha el teorema 10 está demostrado.

Si la recta KL pasa por el punto A, entonces examinemos la figura auxiliar de cuatro vértices $K'L'M'N'$ (dib. 36a), cuyos lados opuestos se cruzan en los puntos P y Q, y la diagonal $K'M'$ pasa por el punto S, pero no pasa por los puntos A y K. Mientras ya está demostrado que el teorema 10 es justo tanto para las figuras de cuatro vértices $ABCD$ y $K'L'M'N'$ como para las figuras de cuatro vértices $K'L'M'N'$ y $KLMN$. La aplicación de este teorema para el primer par de las figuras de cuatro vértices muestra que por el punto T pasa la diagonal $L'N'$ mientras que su aplicación para el segundo par da que por el punto T pasa también la diagonal LN. El teorema 10 está demostrado por completo.

§ PROBLEMAS

Existen muchos problemas que requieren para su solución el uso de teoremas de configuración. Teoremas de configuración son útiles particularmente para la solución de problemas de construcción en los cuales se encuentran así llamados puntos o rectas "inaccesibles".

Las nociones sobre elementos inaccesibles han surgido de cuestiones prácticas. Si el dibujante se tropieza con el hecho de que las rectas trazadas a y b concurren fuera de la plancheta (dib. 37), en dicho caso, el punto de su intersección, aunque existe, no puede ser usado para



DIBUJO 37

aplicar a éste ningunos instrumentos de dibujo. En la práctica geodésica uno u otro punto puede resultar inaccesible para la persona que mide, puesto que, por ejemplo, se encuentra en el terreno pantanoso o sobre la superficie terrestre. El punto inaccesible siempre aparece como intersección de algunas rectas trazadas en el dibujo o marcadas en el terreno con ayuda de colimación o jalonamiento

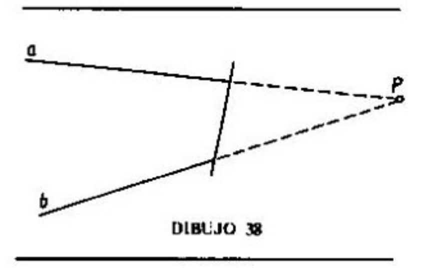
En el sentido de construcciones geométricas el punto inaccesible se caracteriza por el hecho de que es imposible poner en dicho punto la pierna de compás o la regla.

Al efectuar trabajos gráficos, empleados los instrumentos, puede suceder que una recta debe pasar por el lugar donde está puesto el instrumento que no permite ningún traslado (pantógrafo, planímetro). En las condiciones de trabajos geodésicos con frecuencia resulta imposible prácticamente poner jalones a lo largo de una recta o pasar por ella con cinta métrica.

Los diversos casos prácticos de aparición de los puntos y rectas inaccesibles permiten hacer descripción matemática siguiente.

El *punto inaccesible* dado lo llamaremos el punto que se determina por las dos rectas convergentes dadas siendo que en el proceso de solución del problema dado para efectuar construcciones no se permite usar el mismo punto de intersección de estas rectas. El punto inaccesible P determinado por las rectas a y b (dib. 38) designaremos por $P(a, b)$.

La *recta inaccesible* dada la llamaremos la recta que está determinada por dos puntos dados (no importa, accesibles o inaccesibles), al



DIBUJO 38

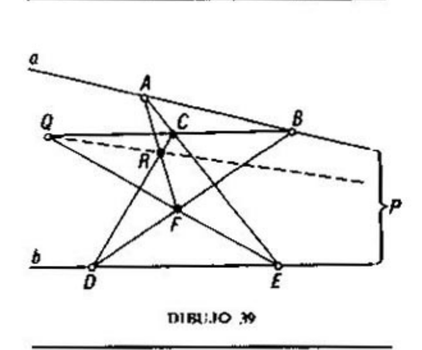
mismo tiempo no se permite usar la misma recta para realizar construcciones. La recta inaccesible p determinada por los puntos A y B designaremos por $p(A, B)$.

Expongamos algunos ejemplos de solución de problemas con elementos inaccesibles con ayuda de teoremas de configuración. Los teoremas de configuración permiten resolver tales problemas de construcción usando sólo la regla lo que es sumamente útil para geodesia donde no hay nada parecido al compás.

Problema 1. Se tiene: el punto Q (ordinario) y el punto $P(a, b)$ inaccesible. Trazar la recta PQ.

I procedimiento de solución (mediante el teorema de Pappus — Pascal).

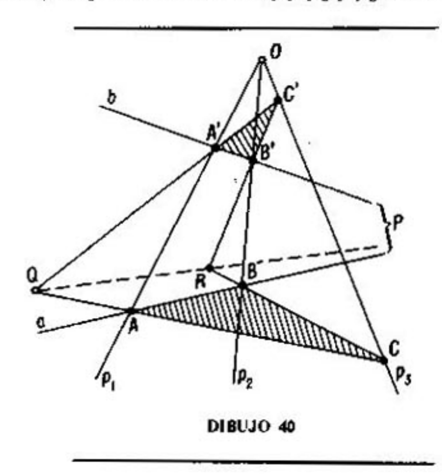
En la recta a se toman arbitrariamente los puntos A y B, mientras que en la recta b, los puntos D y E (dib. 39). Supongamos que C es el punto de intersección de las rectas AE y BQ; esto notaremos convencionalmente así: $C \equiv AE \times BQ$. Sea, luego, (en designaciones conven-



DIBUJO 39

cionales prefijadas) $F \equiv BD \times EQ$, $R \equiv AF \times CD$. Del teorema de Pappus — Pascal aplicado a la figura de seis vértices $ABCDEF$ se deduce que la recta QR pasará por el punto P, es decir, coincidirá con la recta PQ. Por consiguiente, para resolver el problema es bastante unir por medio de la regla los puntos Q y R.

2 procedimiento de solución (mediante el teorema de Desargues). Sea O (dib. 40) un punto arbitrario; p_1, p_2 y p_3, las tres rectas arbitra-

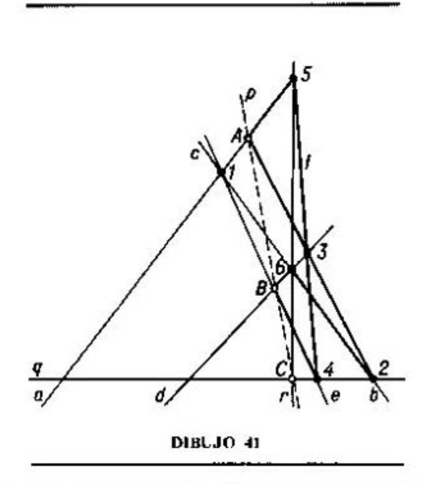


DIBUJO 40

rias que pasan por el punto O. Designemos $a \times p_1 \equiv A$, $b \times p_1 \equiv A'$, $a \times p_2 \equiv B$, $b \times p_2 \equiv B'$. Sea, luego, $AQ \times p_3 \equiv C$, $A'Q \times p_3 \equiv C'$ y, por fin, $BC \times B'C' \equiv R$. Examinando los triángulos ABC y $A'B'C'$ percibimos que según el teorema de Desargues los puntos P, Q y R se encuentran en una recta. Por eso la recta buscada coincide con la recta QR.

Problema 2. Se tiene: la recta q (ordinaria) y la recta inaccesible p (A, B). Se debe construir el punto de intersección de estas rectas.

Es cómodo resolver este problema con ayuda del teorema de Brianchon (§ 2, pág 21). Tracemos por el punto A (dib. 41) dos rec-



DIBUJO 41

tas arbitrarias a y b y por el punto B, dos rectas arbitrarias d y e. Designemos por c la recta que une el punto $1 \equiv a \times e$ con el punto $2 \equiv \equiv b \times q$; por f, la recta que une el punto $3 \equiv b \times d$ con el punto $4 \equiv \equiv e \times q$; por r, la recta que une el punto $5 \equiv a \times f$ con el punto $6 \equiv \equiv c \times d$.

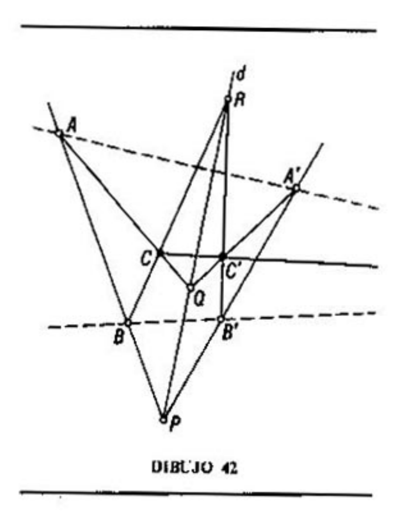
Examinando la figura de seis vértices $A54B62$ señalemos que sus lados $A5$, $4B$ y 62 pasan por el punto 1, y los lados 54, $B6$ y $2A$ por el punto 3. Por eso, según el teorema de Brianchon, las rectas AB, 56 y 42, es decir, las rectas AB, r y q deben convergir en un punto. Por lo tanto, el punto C de intersección de la recta q con la recta inaccesible AB puede ser construida como la intersección de las rectas q y r.

Problema 3. Se debe construir el punto de intersección de las rectas inaccesibles AA' y BB'.

Dado que P (dib. 42) es el punto de intersección de las rectas AB y $A'B'$. Tracemos por este punto la recta arbitraria d y escogemos en

esta recta unos dos puntos Q y R (distintos del punto P). Si $C \equiv AQ \times \times BR$, y $C' \equiv A'Q \times B'R$, entonces la recta CC' pasa por el punto buscado lo que se deduce directamente del teorema 5 del § 3 aplicado a las figuras de tres vértices ABC y $A'B'C'$.

Cambiando la posición de la recta d o la posición de cualquiera de



DIBUJO 42

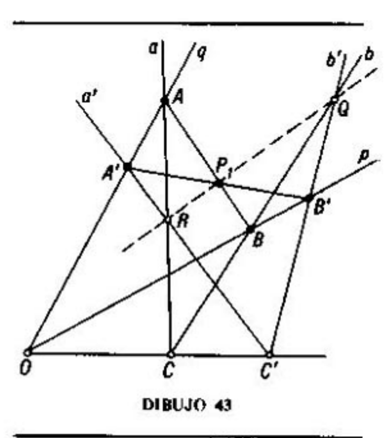
los puntos Q y R, se puede obtener de dicha manera el otro par de los puntos C_1 y C_1 de tal modo que la recta que los une pasará también por el punto incógnito. Después, el punto incógnito se construye como la intersección de las rectas CC' y C_1C_1.

Problema 4. Trazar la recta RQ, si $R(a, a')$ y $Q(b, b')$ son los dos puntos inaccesibles.

Sea C' (dib. 43) el punto de intersección de las rectas a' y b'; C es el punto de intersección de las rectas a y b. Tomemos en la recta CC' el punto arbitrario O (diferente de C y C'). Tracemos por el punto O dos rectas arbitrarias p y q (diferentes de la recta CC'). Sean B y B' puntos de intersección de la recta p respectivamente con las rectas b y b', mientras que A y A' son los puntos de intersección de la recta q respectivamente con las rectas a y a'.

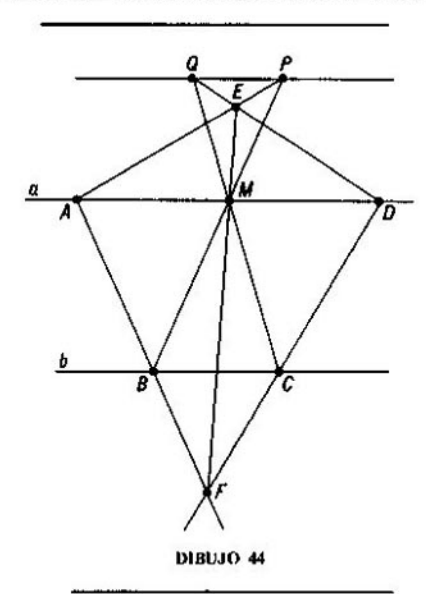
El punto $P_1 \equiv AB \times A'B'$ está situado en la recta QR lo que se deduce directamente del teorema de Desargues aplicado a las figuras de tres vértices ABC y $A'B'C'$. Del mismo modo, variando la posición del punto O en la recta CC' o cambiando las rectas p y q, se puede encontrar un punto más P_2 en la recta QR. La recta P_1P_2 es buscada.

Rroblema 5. Hay dos rectas paralelas *a* y *b*, y el punto *Q*. Se debe trazar por el punto *Q* una recta paralela a las rectas dadas empleando sólo la regla.



DIBUJO 43

Tomemos arbitrariamente (dib. 44) los puntos *A* y *D* en la recta *a* y los puntos *B* y *C*, en la recta *b*. Entonces, *ABCD* es un trapecio. Cons-



DIBUJO 44

truimos el punto F de intersección de los lados laterales del trapecio. Sea M el punto de intersección de la recta CQ con la base del trapecio AD. Construimos el punto $E \equiv DQ \times FM$ y el punto $P \equiv AE \times \times BM$. En este caso, según el corolario del teorema 6 del § 4, la recta PQ es la paralela a buscar.

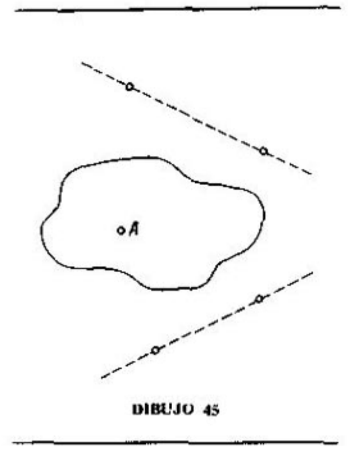
Los problemas siguientes se le ofrecen al lector para su solución independiente.

Problema 6. Trazar por el punto inaccesible dado una recta paralela a la recta dada.

Problema 7. Trazar por el punto dado una recta paralela a la recta inaccesible dada.

Problema 8. Demostrar: si los lados y diagonales de un cuadrángulo son paralelos respectivamente a los lados y diagonales del otro cuadrilátero, dichos cuadriláteros son homotéticos (situados semejantemente).

Problema 9. Demostrar: si $ABCD$ y $AB'CD'$ son dos paralelogra-



DIBUJO 45

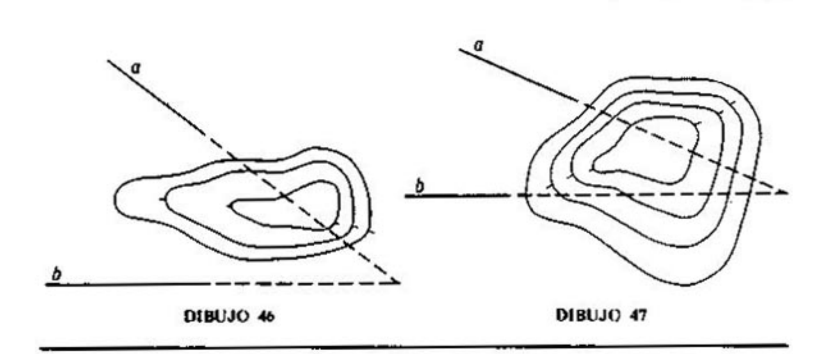
mos, entonces son paralelas respectivamente las rectas BB' y DD' y las rectas BD' y $B'D$.

Problema 10. Determinar a los cuales problemas expuestos se puede aplicar la solucion de las siguientes cuestiones:

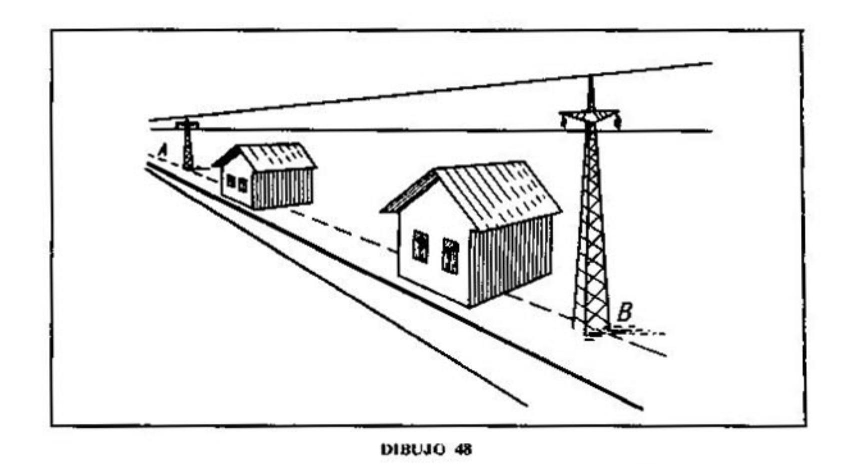
1. Dos rectas en el mar están marcadas por balizas. Permaneciendo en los límites de la isla, de donde se puede observar las balizas, se debe señalar con jalones la recta que pasa por el punto A dado en la isla y está dirigida al punto de intersección de las rectas marcadas por balizas (dib 45).

2. ¿Cómo hallar el punto de intersección de las rectas *a* y *b*, si en el camino de la recta *a* hay una colina que no permite efectuar colimación (dib. 46)?

3. Resolver el mismo problema en caso cuando se encuentran obstáculos en ambas rectas (dib. 47).



DIBUJO 46 DIBUJO 47



DIBUJO 48

4. Entre mastiles *A* y *B* de la transmisión eléctrica (dib. 48) se debe colocar una mástil más *C*. ¿Cómo determinar su lugar, si entre las mástiles *A* y *B* se encuentran dos edificios?

5. Sin moverse de la tierra firme hay que determinar en que lugar

se encontrarán dos líneas de transmisión eléctrica en construcción que están representadas en el dib. 49.



DIBUJO 49

§ 6. ACERCA DE LA INTERPRETACION ALGEBRAICA DE TEOREMAS DE CONFIGURACION

Hemos conocido algunos importantes teoremas de configuración y recibido ideas de sus posibles aplicaciones. Es natural que surge una serie de problemas: ¿se puede obtener algunos nuevos teoremas de configuración? ¿hay gran número de teoremas de configuración?

¿Existen teoremas de configuración además de los que se puede deducir de los teoremas de Pappus — Pascal y de Desargues? ¿Hay un método general para revelar propiedades de configuración del plano? Estos problemas nos llevan a la otra esfera de investigaciones. Muchos de sus resultados fueron obtenidos en los últimos decenios. Una serie de problemas todavía está por resolver. Tratemos de dar una noción general acerca de esta parte de matemáticas.

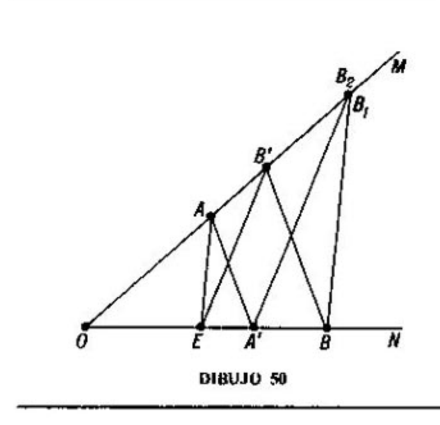
Aún en el siglo XVII en búsqueda del método general de investigaciones geométricas se les ocurrió a los matemáticos la idea de coordenadas que permite aplicar métodos algebraicos y de cálculo a geometría. Durante el desarrollo de esta idea al principio del siglo XX fue descubierto el papel importante del teorema de Pappus — Pascal y de Desargues en la fundación de relaciones de geometría con álgebra y aritmética. Por fin, las investigaciones ulteriores han determinado que cada teorema de configuración puede ser "Traducido al idioma algebraico". En una serie de los casos aparecen identidades algebraicas. Al revés, cada identidad algebraica se la puede representar geométricamente como un teorema de configuración.

Vamos a dirigirnos a un ejemplo simple.

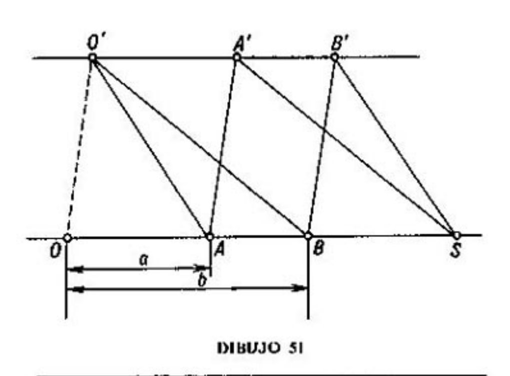
Sean dados dos números arbitrarios a y b. Eligiendo un segmento como unidad, representemos estos números como segmentos. Entonces, el producto ab de los números dados también se puede representar como un segmento. Este segmento se puede construir del modo siguiente (dib. 50). Tomemos un ángulo arbitrario MON. En el lado OM tracemos el primer factor, es decir, tal segmento OA que $|OA| = a$, y en el otro lado ON, tales segmentos OB y OE que $|OB| = b$ y $|OE| = 1$. Tracemos la recta $BB_1 \parallel AE$. Entonces $|OB_1| : |OB| = |OA| : |OE|$, es decir, $|OB_1| : b = a : 1$. De aquí $|OB_1| = ab$. A continuación guiándose de la misma regla construiremos el producto ba. Para ello en el lado OM tracemos el primer factor, es decir, tal segmento OB' que $|OB'| = b$, y en el lado ON, el segundo factor, es decir, tal segmento OA que $|OA'| = a$. Tracemos $A'B_2 \parallel B'E$. Entonces, el segmento OB_2 representará el producto ba. Según la construcción $AE \parallel BB_1$ De lema 1 en la página 17 se deduce fácilmente que $AA' \parallel BB'$. Por eso a la figura de seis vértices $AA'B_1BB'E$ se puede aplicar el teorema de Pappus — Pascal. Por consiguiente, $A'B_1 \parallel B'E$. Sin embargo, según la construcción $A'B_2 \parallel B'E$. Por esta razón, la validez del teorema de Pappus — Pascal quiere decir que el punto B_2 coincide con el punto B_1, o sea, que tiene lugar la igualdad $|OB_1| = |OB_2|$ o bien, lo que es lo mismo, $ab = ba$. De tal modo, "en el idio-

ma algebraico" el teorema de Pappus — Pascal significa conmutatividad de la multiplicación.

En calidad de otro ejemplo examinaremos el siguiente caso particular del teorema de Pappus — Pascal: el pequeño teorema de Pappus: *si los vértices de una figura de seis vértices se encuentran consecu-*



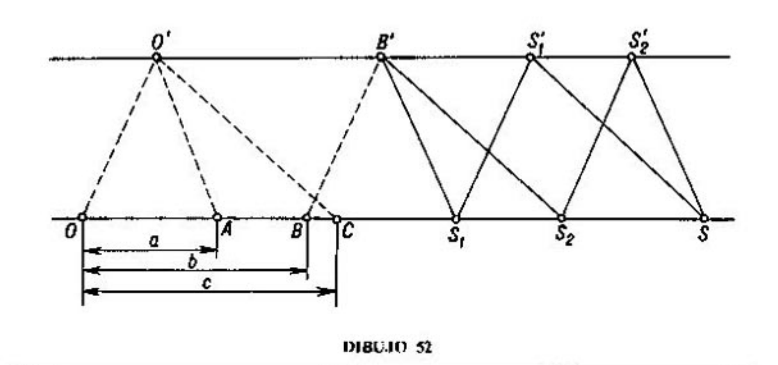
DIBUJO 50



DIBUJO 51

tivamente en dos rectas paralelas y dos de sus lados son paralelos a sus lados opuestos, entonces los lados opuestos del tercer par son también paralelos entre sí (dib. 51). Empleando las designaciones del dib. 51, tracemos por el punto O' la recta $OO' \parallel AA'$ y ponemos $|OA| = a$ y $|OB| = b$. Para recibir la suma $a + b$, traslademos el segmento OB a la posición $O'B'$, y luego, a la posición AS. Entonces $|OS| = a + b$. Si

apliquemos el mismo procedimiento para obtener la suma $b + a$, entonces debemos trasladar el segmento OA a la posición $O'A'$, y luego, el segmento $O'A'$ trasladarlo a la recta OA de tal modo que el punto O' se acierte en B. El pequeño teorema de Pappus afirma que con ello el segmento $O'A'$ coincide con BS, es decir, que $a + b = b + a$. Se puede indicar también otra interpretación algebraica del teorema pequeño de Pappus. Con este fin supongamos que la figura de seis vértices ocupa la posición $B'S_1S_1'SS_2'S_2$ (dib. 52). Tracemos las rectas



DIBUJO 52

$OO' \parallel S_1S_1'$, $BB' \parallel S_1S_1'$, $OA \parallel B'S_1$ y $O'C \parallel B'S_2$ y ponemos $|OA| = a$, $|OB| = b$ y $|OC| = c$. Entonces, de acuerdo con la construcción arriba descrita, tenemos $|OS_1| = b + a$ y $|OS_2| = b + c$. Por consiguiente, la validez del teorema pequeño de Pappus significa lo justo de la igualdad $(b + a) + c = (b + c) + a$.

Al estudiar con más profundidad el problema y después de adquirir hábitos necesarios, se puede aprender a representar diferentes identidades algebraicas como teoremas de configuración. Puesto que se puede formar tanto como se quiera identidades, igualmente es posible hacer cualquier cantidad de teoremas de configuración. Con ello el número de puntos y rectas, acerca de los cuales se dice en el teorema, se puede hacerlo arbitrariamente grande.

A medida que se complica el teorema de configuración su formulación verbal se hace más difícil. Por eso, para anotar teoremas de configuración compuestos suelen usar un esquema universal condicional. Vamos a conocer este esquema a base del ejemplo del teorema de Pappus – Pascal. Según los datos de este teorema (véase la pág. 15), los puntos A, C y E se encuentran en una recta. Para expresar estos

datos en el esquema, estos puntos se anotan en una línea:

ACE.

La misma condición se les impone a los puntos *B*, *D* y *F*, y por eso aparece una línea más del esquema:

BDF.

A continuación, el punto *P* se forma en la intersección de las rectas *AB* y *DE*. Esta construcción en el esquema se representa del modo siguiente:

$$\left.\begin{matrix} AB \\ DE \end{matrix}\right\} P$$

La construcción de los puntos *Q* y *R* se representa del mismo modo. La anotación esquemática completa del teorema de Pappus — Pascal tiene la forma siguiente:

ACE
BDE

$$\left.\begin{matrix} AB \\ DE \end{matrix}\right\} P$$

$$\left.\begin{matrix} BC \\ EF \end{matrix}\right\} Q$$

$$\left.\begin{matrix} CD \\ AF \end{matrix}\right\} R$$

PQR.

La última anotación bajo la raya expresa la conclusión del teorema: "los puntos *P*, *Q* y *R* se encuentran en una línea".

Aquí hay ejemplo de la anotación esquemática del teorema de configuración más complejo donde se trata de 14 puntos (están marcados con números) y 16 rectas (aparecen durante la construcción):

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix}\right\} 7$$

$$\left.\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{matrix}\right\} 8$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{matrix}\right\} 9$$

$$\left.\begin{matrix} 2 & 9 \\ 7 & 8 \end{matrix}\right\} 10$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 10 \end{matrix}\right\} 11$$

$$\left.\begin{matrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{matrix}\right\} 12$$

$$\left.\begin{matrix} 6 & 7 \\ 5 & 11 \end{matrix}\right\} 13$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{matrix}\right\} 14$$

$$2 \quad 13 \quad 14$$

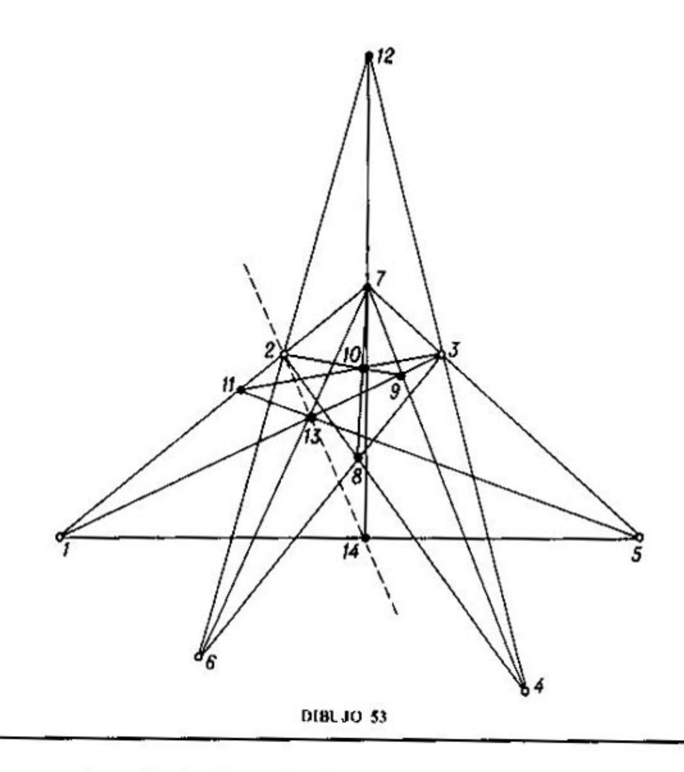
Gráficamente este teorema está representado en el dib. 53. Toda la figura aparece de seis puntos escogidos arbitrariamente *1, 2, 3, 4, 5* y *6*. El mismo teorema apareció de la identidad

$$a(bc) + d = (ab)c + d.$$

Es difícil imaginar que tal teorema de configuración se puede obtener por medio de razonamiento geométrico directo sin atraer su representación algebraica.

Nos detenemos en un ejemplo más de algebraización de teoremas de configuración. Con este fin llamaremos como el producto de dos

puntos diferentes la única recta que pasa por dichos puntos, y como el producto de dos rectas diferentes, su punto común único (aquí no hacemos diferencia entre elementos propios e impropios). De tal modo, se hizo operación con el conjunto de puntos y rectas. Es verdad que a diferencia de las operaciones aritméticas ordinarias no siempre exis-



DIBUJO 53

te el producto de dos elementos. La operación introducida posee propiedades siguientes:

(1) si ab existe, entonces existe ba y $ab = ba$;

(2) si existe el producto (ab) y $a \neq ab$, entonces el producto $a(ab)$ no existe;

(3) si $ab = ac$ (aquí y en adelante la anotación ab significa que ab existe, es decir, la igualdad $ab = ac$ se debe leer así: "ab y ac existen y $ab = ac$") y $b \neq c$, entonces $ab = bc$.

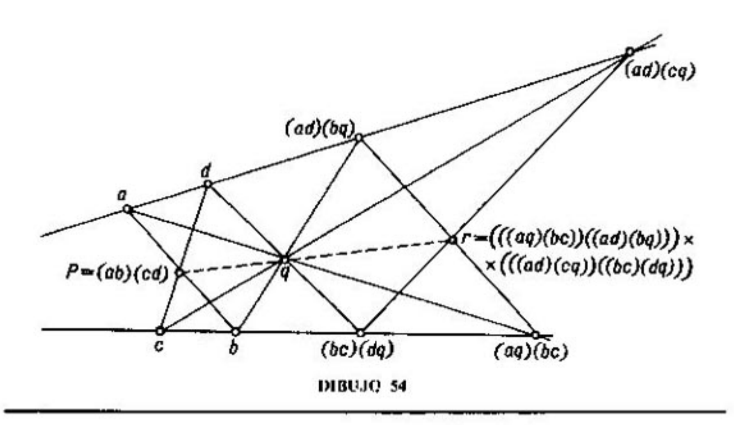
El sentido geométrico de la primera de estas propiedades es evidente. La segunda significa que el producto de dos puntos (rectas) diferentes es la recta (punto) y la tercera significa que la recta (punto) se determina por todos dos puntos (rectas) diferentes que se encuentran en ésta (pasan por ésta).

En este idioma el teorema de Desargues (simultáneamente el teorema dual) se formula del modo siguiente:

$$\text{Si } (aa')(bb') = (aa')(cc'), \text{ entonces}$$

$$((ab)(a'b'))((ac)(a'c')) = ((ab)(a'b'))((bc)(b'c')).$$

Se puede esperar que no será difícil hallar la fórmula parecida tam-



DIBUJO 54

bién para el teorema de Pappus — Pascal e igualmente para otros teoremas que se encuentran en el texto.

Formulemos un teorema más:

$$\text{si } ad \neq bc, \; ad \neq aq \text{ y } bc \neq bq,$$

entonces

$$(((aq)(bc))((ad)(bq)))(((cq)(da))((cb)(dq)))q = ((ab)(cd))q.$$

No es difícil convencerse de que geométricamente esto significa

que los puntos p, q y r en el dib. 54 se encuentran en una recta. La demostración de la validez de este teorema se queda como ejercicio para aplicación del teorema de Desargues.

En conclusión señalemos que a pesar de gran diversidad de teoremas de configuración, por más complejos que sean, todos dichos teoremas (esto fue demostrado estrictamente) pueden ser deducidos del teorema de Pappus – Pascal. Recordemos que para el teorema de Desargues tal razonamiento fue efectuado en la página 28.

BIBLIOGRAFIA

1. *Argunov B. I.*, Postulados de configuración y sus equivalentes algebraicos, colección matemática. 26 (1950), 425—456.
2. *Guilbert D. y Con-Fossen S.*, Geometria demostrativa, M. L., Gostejizdat, 1950.
3. *Curant R. Robbins G.*, ¿Qué es matemáticas? M. L., Gostejizdat, 1947.
4. *Skorniakov L. A.*, Planos proyectivos, UMN VI, Edición 6 (1951), 112—154.
5. *Pickert G.*, Projektive Ebenen, Springer, Berlin, 1975 (Segunda edición).
6. *Stewenson F. W.*, Projective planes, Springer, New York, 1972.

A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial "Mir", 1 Rizhski per., 2, 129 820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

BAJO EL SELLO DE LA EDITORIAL "MIR" EN EL 1981 PUBLICARÁN:

Golovina L., Yaglom I.
INDUCCIÓN EN LA GEOMETRÍA

Este libro, dirigido a los alumnos de grados superiores, profesores de matemáticas y estudiantes de las facultades de física y matemática de los institutos de pedagogía, tiene puntos de contacto con el libro "Método de inducción matemática" de I. Sominski (Editorial Mir, 1974) y puede ser considerado como su continuación: será de interés especial para los que conocen ya el libro de I. Sominski. Contiene 37 ejemplos seguidos de la solución detallada y 40 problemas acompañados de breves indicaciones. Está dedicado a diversas aplicaciones del método de inducción matemática para la solución de problemas geométricos. A nuestro parecer, lo más importante en él son los distintos aspectos del método de inducción matemática: algunos (no todos, por supuesto) ejemplos y problemas pueden también representar interés por sí mismos.
Este texto puede utilizarse en el trabajo del círculo matemático de la escuela secundaria así como en forma autodidacta.

Markushévich A.
AREAS Y LOGARITMOS

Este trabajo del Doctor en Ciencias Fisicomatemáticas, A. Markushévich, fue enunciado primeramente en la Universidad de Moscú ante los alumnos de grados superiores de las escuelas secundarias. En la obra se expone la teoría geométrica de los logaritmos en la que los últimos aparecen como ciertas áreas. Las propiedades de logaritmos se obtienen del análisis de las propiedades respectivas de las áreas. Junto con esto el libro proporciona las más simples nociones y propiedades del cálculo integral.
No es forzosamente necesario que el lector sepa qué no es logaritmo. No obstante, el lector debe tener conocimientos primarios sobre las funciones y su representación gráfica. progresión geométrica y el límite.
En el caso de que el lector desee obtener la mayor información sobre los logaritmos podría referirse a la obra "Series" del mismo autor.
El libro será útil como el libro de lectura para escolares y aquellos lectores que estén interesados por los problemas que en el mismo se exponen.

Lecciones populares de matemáticas

La Editorial Mir publicará en el año 1980
los siguientes libros de esta serie:

Kostovski A.
Construcción geométrica con un solo
círculo

Solodóvnikov A.
Sistemas de desigualdades
lineales

Fetisov A.
Acerca de las demostraciones
en Geometría

Beskin N.
División del segmento en la
razón dada

Editorial MIR  Moscú